Exercice A1 — Calcul 5 points

2 points
1. Réduire à une seule puissance puis donner l'écriture décimale chacun des nombres suivants :

   (a) $(-2)^{-5} \cdot (-2)^{8}$ (b) $36^{\frac{1}{2}}$

2. On considère les nombres suivants :

   $A = 4300 \cdot 10^{31}$ $B = 0,0003 \cdot 10^{-12}$

   2 points (a) Exprimer A et B en notation scientifique.

   1 point (b) Effectuer l'opération $A \cdot B$ et donner le résultat en notation scientifique.

1. (a) $(-2)^{-5} \cdot (-2)^{8} = (-2)^{-5+8} = \boxed{(-2)^{3} = -8}$

   (b) $36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = \boxed{6}$ (l'écriture était déjà donnée comme une seule puissance)

2. (a) $A = 4300 \cdot 10^{31} = 4,3 \cdot 10^{3} \cdot 10^{31} = \boxed{4,3 \cdot 10^{34}}$ ($4300 = 4,3 \times 10^{3}$ car pour aller de 4300 à $4,3$ on décale la virgule de 3 vers la gauche)

   $B = 0,0003 \cdot 10^{-12} = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-12} = \boxed{3 \cdot 10^{-16}}$ ($0,0003 = 3 \times 10^{-4}$ car pour aller de $0,0003$ à 3 on décale la virgule de 4 vers la droite)

   Pour contrôler le signe de la puissance de 10, toujours se rappeler que quand on multiplie par une puissance entière positive de 10, on obtient un nombre plus grand (et quand on multiplie par une puissance entière négative de 10, on obtient un nombre plus petit)

   (b) $A \cdot B = 4,3 \cdot 10^{34} \cdot 3 \cdot 10^{-16} = 4,3 \cdot 3 \cdot 10^{34} \cdot 10^{-16} = 12,9 \cdot 10^{34-16} = 12,9 \cdot 10^{18} = 1,29 \cdot 10^{1} \cdot 10^{18} = \boxed{1,29 \cdot 10^{19}}$

Exercice A2 — Calcul littéral 5 points

2 points
1. (a) Compléter le triangle de Pascal suivant :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

   1 point (b) Avec l'aide du triangle, développer $(x+1)^{4}$.

2 points
2. Résoudre l'équation $3x^{2} - 27 = 0$.

1. (a) On a complété le triangle de Pascal en rouge.

   (b) On utilise la 5e ligne du triangle pour développer $(x+1)^{4} = 1 \cdot x^{4} \cdot 1^{0} + 4 \cdot x^{3} \cdot 1^{1} + 6 \cdot x^{2} \cdot 1^{2} + 4 \cdot x^{1} \cdot 1^{3} + 1 \cdot x^{0} \cdot 1^{4} = \boxed{x^{4} + 4x^{3} + 6x^{2} + 4x + 1}$.

2. On résout :

$$\begin{aligned} 3x^{2} - 27 &= 0 & \\ 3x^{2} &= 27 & +27 \\ x^{2} &= 9 & \div 3 \\ x &= \pm 3 & \text{Deux nombres donnent 9 quand ils sont élevés au carré} \end{aligned}$$

Du coup, $\boxed{\mathcal{S} = \{-3; 3\}}$.

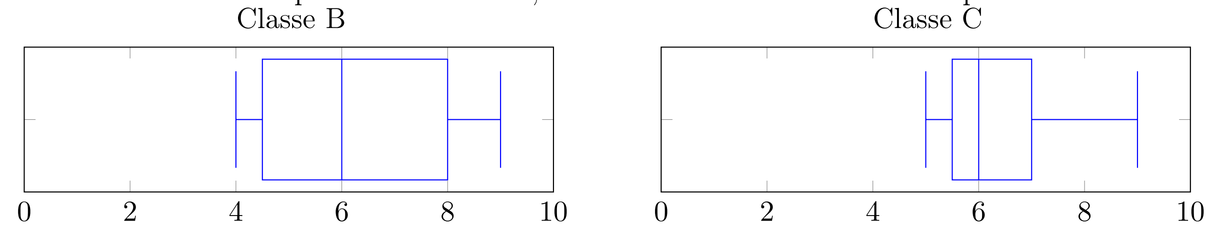
Exercice A3 — Statistiques **5 points**

La classe A, avec 8 élèves, a obtenu les notes suivantes à un test : 8; 4; 5; 10; 5; 3; 7; 7.

3 points

1. Dessiner la boîte à moustaches de cette série statistique. On détaillera les calculs pour la médiane et les quartiles.

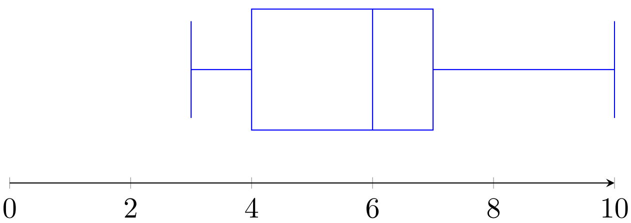
Deux autres classes ont passé le même test, et voici les boîtes à moustaches qui en résultent :



2 points

2. Comparer les résultats des classes B et C. On formulera des comparaisons sur au minimum 4 indicateurs statistiques pertinents.

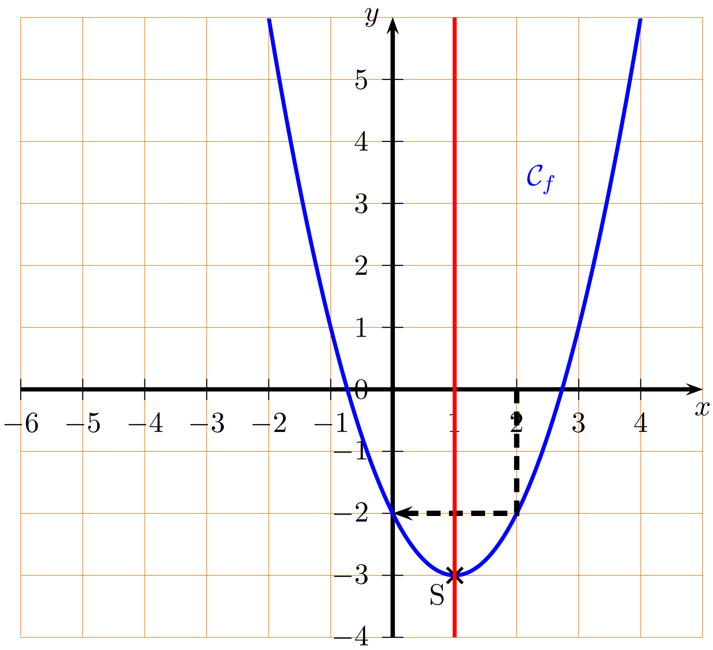
1. On ordonne la série de 8 valeurs de manière croissante : 3; 4; 5; 5; 7; 7; 8; 10
   - Médiane : il s'agit de la demi-somme des valeurs de rangs est $\frac{8}{2} = 4$ et $\frac{8}{2} + 1 = 5$. La 4e valeur est 5, la 5e valeur est 7, la demi-somme vaut donc $\frac{5+7}{2} = \boxed{6}$.
   - Q1 : $\frac{8}{4} = 2$ donc c'est la 2e valeur. C'est $\boxed{4}$.
   - Q3 : $\frac{8 \times 3}{4} = 6$ donc c'est la 6e valeur. C'est $\boxed{7}$.



2. D'abord, on voit que l'écart inter-quartile (la largeur du rectangle) de C est plus petit : la classe C est plus homogène. Ensuite, on voit que la note la plus petite note est dans la classe A, on voit que chaque classe a la même plus grande note. Enfin, la médiane est la même.

Exercice A4 — Modèles quadratiques **5 points**

Dans cet exercice, on considère une fonction du second degré f, dont on donne le graphique ci-contre.



1 point — 1. Lire graphiquement $f(2)$.

1 point — 2. Lire graphiquement les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.

2 points — 3. Tracer l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ et donner son équation.

4. On cherche l'expression :

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

1 point — On a réussi à prouver que a vaut soit 1 soit −1. Quelle est la bonne valeur ? Justifiez.

1. On lit $\boxed{f(2) = -2}$ (voir les traits de construction noirs pointillés).
2. On lit $\boxed{\mathrm{S}(1; -3)}$.
3. L'équation de l'axe de symétrie est donc $\boxed{x = 1}$ (tracé en rouge).
4. La parabole est tournée vers le haut donc $a > 0$, ainsi c'est la valeur $\boxed{a = 1}$.

Exercice B1 — Calcul 5 points

	Archimède, dans son Traité l'*Arénaire* essaie d'estimer le nombre de grains de sable dans l'Univers. La masse d'un grain de sable est estimée à environ 50 microgrammes ; certaines poussières de sable ont une masse de seulement 350 nanogrammes.
2 points	1. Exprimer ces quantités en grammes en utilisant la notation scientifique.
	Si nous estimons qu'il y a 250 000 grains de sable dans un gramme de sable et que la masse de la Terre est estimée à $M_T = 5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ g :
1 point	2. Exprimer la masse de la Terre en notation scientifique.
2 points	3. Calculer approximativement le nombre de grains de sable qui pourraient tenir sur Terre.

1. La masse d'un grain de sable est d'environ 50 microgrammes, c'est-à-dire, en grammes : $50 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^1 \cdot 10^{-6} = \boxed{5 \cdot 10^{-5}}$.
   La masse d'une poussière de sable est d'environ 350 nanogrammes, c'est-à-dire, en grammes : $350 \cdot 10^{-9} = 3,5 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} = \boxed{3,5 \cdot 10^{-7}}$.
2. Toujours en grammes, $M_T = 5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = \boxed{5,98 \cdot 10^{27}}$.
3. Si la terre n'était composée que de grains de sable, avec une masse totale de $5,98 \cdot 10^{27}$ g, on a le tableau de proportionnalité suivant :

Masse (g)	1	$5,98 \cdot 10^{27}$
Nombre de grains	250 000	x

   Le nombre de grains de sables qui correspondrait est donc $\dfrac{250\ 000 \cdot 5,98 \cdot 10^{27}}{1} = \boxed{1,495 \cdot 10^{33}}$.

Exercice B2 — Calcul littéral 6 points

	Étant donnés les polynômes suivants : $P(x) = 7x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$ $\qquad Q(x) = (2x-3)^2$ $\qquad R(x) = x - 2$
2 points	1. Développer et réduire $Q(x)$.
2 points	2. Développer et réduire $P(x) \cdot R(x)$.
2 points	3. Trouver $P(-1)$.

1. On peut reconnaître l'identité remarquable ($(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$) ou bien appliquer la double distributivité.
   $Q(x) = (2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = \boxed{4x^2 - 12x + 9}$.
2. Ici on applique la distributivité ("quadruple" distributivité !) :

$$
\begin{array}{rll}
 & P(x) \cdot R(x) & \\
 = & (7x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1) \times (x - 2) & \text{On remplace.} \\
 = & 7x^4 \times x - 7x^4 \times 2 + 2x^3 \times x - 2x^3 \times 2 - 3x^2 \times x + 3x^2 \times 2 + 1 \times x - 1 \times 2 & \text{Distributivité.} \\
 = & 7x^5 - 14x^4 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^3 + 6x^2 + x - 2 & \text{On simplifie.} \\
 = & \boxed{7x^5 - 12x^4 - 7x^3 + 6x^2 + x - 2} & \text{On simplifie encore.}
\end{array}
$$

3. Pour trouver $P(-1)$, on remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$. Cela donne :
   $P(-1) = 7 \times (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 1 = 7 - 2 - 3 + 1 = \boxed{3}$.

Exercice B3 — Statistiques **5 points**

À la poste, des lettres et des colis doivent être pesés. Un lundi, les masses des lettres étaient les suivantes (en g) : 15; 14; 18; 19; 19

3 points

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

Le mardi, parmi les colis du jour, un postier prend un échantillon aléatoire de 10 colis. Il calcule qu'en moyenne, dans son échantillon, les colis pèsent 1,7 kg.

2 points

2. Dans cette situation, quelle est la population totale ? L'échantillon ? Le caractère étudié ?

1. Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{15+14+18+19+19}{5} = \boxed{17}$.

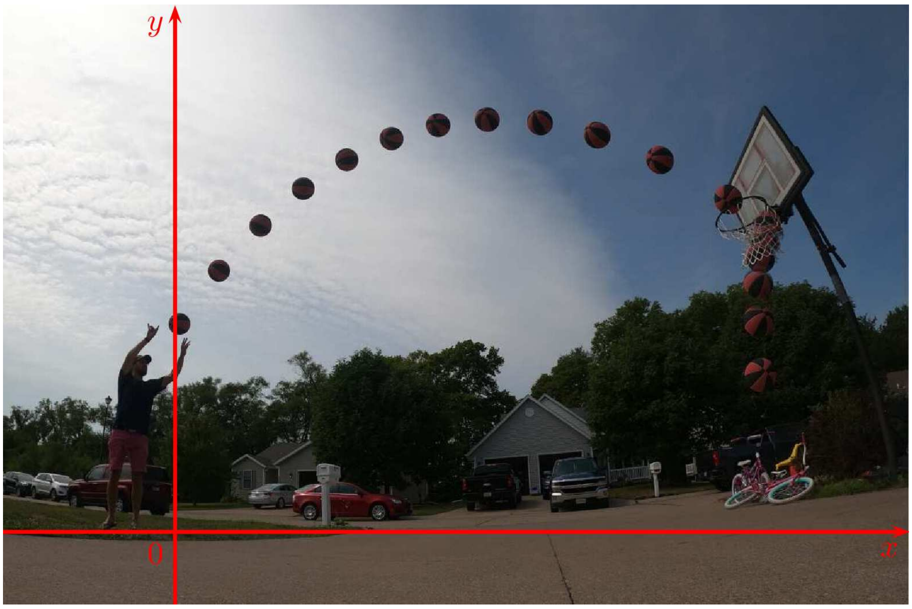
   Écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{\frac{(15-17)^2+(14-17)^2+(18-17)^2+(19-17)^2+(19-17)^2}{5}} = \sqrt{\frac{(-2)^2+(-3)^2+1^2+2^2+2^2}{5}} = \sqrt{\frac{4+9+1+4+4}{5}} = \boxed{\sqrt{4,4} \approx 2,1}$

   Ce lundi, la moyenne des masses des lettres était de $\boxed{17 \text{ g}}$ et leur écart-type était de $\boxed{2,1 \text{ g}}$.

2. Dans cette situation, la population totale est $\boxed{\text{l'ensemble des colis du mardi}}$. L'échantillon est $\boxed{\text{les 10 colis}}$ pris au hasard par le postier. Le caractère étudié est $\boxed{\text{la masse}}$.

Exercice B4 — Modèles quadratiques **4 points**

Un joueur de basketball a réussi un lancer. La photographie ci-dessous donne plusieurs positions de la balle :



Du lancer jusqu'à l'anneau, on modélise par $f(x)$ la hauteur de la balle (en mètres), en fonction de l'abscisse x (en mètres) de la balle par rapport à l'endroit du lancer. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	2,06	2,52	2,92	3,24	3,50	3,69	3,80	3,85	3,83

1 point

1. Quelle semble être la hauteur maximale de la balle ?

2. On donne l'expression $f(x) = -0,14x^2 + 1,008x + 2,0356$.

3 points

   Trouver les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.

1. La plus grande valeur de $f(x)$ dans le tableau est de $3,85$ donc la hauteur maximale de la balle semble être de $\boxed{3,85 \text{ m}}$.

2. On a ici l'expression développée de $f(x)$, avec $a = -0,14$, $b = 1,008$ et $c = 2,0356$. Dans ce cas, le sommet de $\mathcal{C}_f$ se trouve en $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1,008}{2 \times (-0,14)} = 3,6$.

   Pour avoir l'ordonnée du sommet, il faut donc calculer $f(3,6) = -0,14 \times 3,6^2 + 1,008 \times 3,6 + 2,0356 = 3,85$.

   Ainsi le sommet de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $\boxed{(3,6;3,85)}$.