61 Production

Économie

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par les fonctions f, pour le produit A, et g, pour le produit B, définies sur $\mathrm{I} = [0\ ;14]$

$$f(x) = 2000\mathrm{e}^{-0,2x} \text{ et } g(x) = 15x^2 + 50x$$

où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.

1. Sur le graphe, qu'a-t-on représenté en abscisses ? En ordonnées ?

Par lecture graphique et avec la précision permise par le graphique, déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle I on pose :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

On admet que la fonction h est dérivable sur I.

a) Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?

b) Montrer que, pour $x \in \mathrm{I}$:

$$h'(x) = -400\mathrm{e}^{-0,2x} - 30x - 50.$$

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur I.

d) On donne $h(0) = 2\,000$ et $h(14) \approx -3\,518$.

Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur I et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

e) Résoudre alors $g(x) > f(x)$ et retrouver le résultat de la question 1.

62 Taux d'alcoolémie

Thème 1

A ▶ Soit la fonction f définie sur $\mathrm{I} = [0\ ;12]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer $f'(x)$ sur l'intervalle .

2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions dans I. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

B ▶ Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en $\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$) de cette personne.

1. a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 $\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$.

Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

63 Chute libre

Thème 1

La vitesse d'une parachutiste en chute libre, avant qu'il (elle) actionne son parachute est modélisée par :

$$v(t) = 50(1-\mathrm{e}^{-0,2t}),$$

où $v(t)$ est la vitesse, en $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, du (de la) parachutiste en fonction du temps en seconde.

1. Quelle est la vitesse du (de la) parachutiste à $t = 0$?

2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

3. Calculer $v'(t)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction v sur $[0\ ;+\infty[$.

4. Interpréter ce tableau de variations du point de vue du (de la) parachutiste.

5. Dans un article consacré à la découverte du saut en parachute, on peut lire : « Dès la sortie de l'avion et au début du saut, la vitesse de chute augmente très rapidement. puis la vitesse se stabilise aux alentours de 200 km/h. »

Justifier le propos de cet article.

Exercices bilan

64 Bénéfice

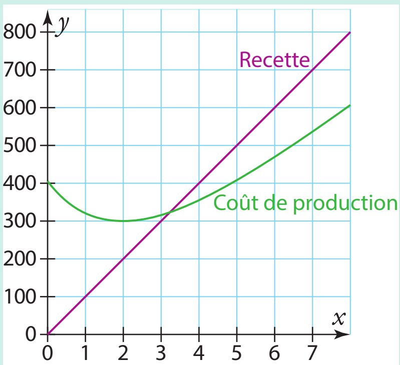
Économie — Thème 1

Une entreprise est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable.
La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres.
Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.

1. Le graphique ci-dessous modélise les recettes et les coûts de production de l'entreprise.

a) Que représentent les abscisses sur le graphe ?

b) Que représentent les ordonnées ?



2. À l'aide du graphique, déterminer à partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise un bénéfice.

3. Le bénéfice en dizaine d'euros correspondant à la vente de x centaines de litres de peinture est donné par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 8] par :

$$f(x)=25x-150\mathrm{e}^{-0,5x+1}$$

a) Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(8)$, puis en donner les valeurs arrondies au centième.

b) Montrer que la dérivée f' de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 8] est :

$$f'(x)=25+75\mathrm{e}^{-0,5x+1}.$$

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur [0 ; 8].

d) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 8] puis en donner la valeur arrondie au centième.

e) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur de α à 10^{-3} près. On expliquera la méthode utilisée.

f) En déduire la quantité de peinture produite et vendue à partir de laquelle l'entreprise réalisera un bénéfice. Donner le résultat au litre près.

65 Plant de maïs

Algo — Thème 2

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t)=\frac{a}{1+b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où $h(t)$, en mètres, représente la hauteur du plant en fonction du temps t, en jours.
Les constantes a et b sont des réels positifs.
On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

1. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

2. On suppose que la fonction h est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

a) Montrer que l'équation h(t) = 1,5 admet une unique solution t_0.

b) À l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

D'après Bac Pondichéry 2013

66 Population de grenouilles

Thème 2

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ où t est le temps écoulé en années depuis 2018 :

$$P(t)=\frac{1\,000}{0,4+3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}.$$

1. Étudier les variations de la fonction P sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0\in[0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0)=2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles.

Exercices d'application

Équations/inéquations du type $\ln u \leqslant a$ ou $e^u \leqslant a$

Méthode 1 p. 95

25 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=0$ **b)** $\ln(x-e)=1$

c) $2\ln(x)+1=-3$ **d)** $e^{5-2x}=2$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(1-x)>0$ **b)** $\ln(3-2x)\leqslant 1$

c) $3e^x-1<8$ **d)** $e^{2x}-3e^x\geqslant 0$

26 Résoudre les équations suivantes.

a) $5-\ln x=2$ **b)** $e^{4x+1}=5$

c) $\ln(2x+e)=1$ **d)** $\ln(x^2+x-6)=0$

27 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln\left(\dfrac{5x+1}{x-2}\right)\leqslant 0$ **b)** $\ln(x^2+2x)-1>0$

c) $6e^x-1\geqslant 3-4e^x$ **d)** $3e^{2x}-9e^x<0$

28 On veut résoudre l'équation :

$$\ln(x)^2+4\ln\left(\frac{1}{x}\right)-5=0 \text{ (E).}$$

1. On pose $X=\ln x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2-4X-5=0$ (E').

2. Résoudre (E').

3. En déduire les solutions de (E).

29 On veut résoudre l'équation $e^{2x}-2e^x=8$ (E).

1. On pose $X=e^x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2-4X-5=0$ (E').

2. Résoudre (E').

3. En déduire les solutions de (E).

Équations/inéquations avec $\ln u$

Méthode 2 p. 95

30 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(3x-6)=\ln(4-x)$

b) $\ln(x)+\ln(8-x)=\ln(12)$

c) $\ln(2x)-\ln(x+1)=\ln(x-5)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(4x-2)+\ln(5)<1-\ln 2$

b) $\ln(5-x)\geqslant\ln(x-1)$

c) $\ln(x-2)+\ln(x+2)\geqslant 0$

31 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=2\ln x$ **b)** $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(4-2x)$

32 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x^2-4x+4)-\ln(x-2)<\ln(8-x)$

b) $\ln(2x+4)+\ln(1-x)-\ln 2\geqslant\ln(e^{-x})-1$

33 Soit les fonctions f et g définies sur $]2\,;\,4[$ par $f:x\mapsto\ln(3x-6)$ et $g:x\mapsto 2\ln(4-x)$.

1. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ s'interceptent-elles ?

2. Quelle est la position relative de ces deux courbes ?

Propriétés algébriques de ln

Méthode 3 p. 97

34 **1.** Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif.

a) $2\ln 5-\ln 15$

b) $-\ln 3+4\ln 2-\ln 5$

2. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 5$.

a) $4\ln 5+\ln 25-3\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

b) $\ln 125-\dfrac{1}{2}\ln 25+\ln\left(\dfrac{1}{25}\right)-4\ln\sqrt{5}$

35 **1.** Exprimer sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif, le nombre $3\ln 2-\ln 9+\ln 5$.

2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ le nombre $\ln 8-3\ln 4+\ln\sqrt{2}$.

36 Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^{2\ln 3+\ln 4}$ **b)** $e^{3\ln 2-\ln 4}$

c) $\dfrac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}$ **d)** $\dfrac{e^{2\ln 5+\ln 3}}{e^{2\ln 3}}$

37 Justifier les égalités suivantes.

a) $e^{3\ln 3}+e^{2\ln 7}=76$

b) $e^{5\ln 3}\times e^{4\ln 9}=3^{13}$

c) $\ln(1+e^5)+\ln\left(\dfrac{1}{1+e^{-5}}\right)=5$

Inéquations du type $q^n<a$

Méthode 4 p. 97

38 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<10^{-4}$ **b)** $\left(\dfrac{9}{7}\right)^n\geqslant 10^6$

c) $1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999$ **d)** $0{,}004>\left(\dfrac{8}{9}\right)^{2n}$

39 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\leqslant 0{,}001$ **b)** $1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999999$

c) $1{,}2^{2n}>10^5$ **d)** $0{,}02>\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$

40 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison $q=\dfrac{3}{2}$.

À partir de quel rang n les termes de la suite sont-ils strictement supérieurs à 1 million ?

41 On tire successivement, et avec remise, n boules d'une urne contenant 5 boules blanches et 25 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999 ?

42 On place 2 500 € à intérêts composés à un taux annuel de 1,75 %. Combien d'années faudra-t-il pour doubler son capital ?

Étude de fonction avec ln

Méthode 5 p. 99

43 Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans se soucier de l'ensemble de définition ou de dérivabilité.

a) $f(x) = (\ln x + 3)(x - 2)$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{3\ln x + 1}$

c) $f(x) = (\ln(x) - 2x + 1)^3$ **d)** $f(x) = \sqrt{3x - x\ln(x)}$

44 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + 1$.
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
3. a) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ en 1.
b) Montrer que $f(x) - (2x - 1) = 2u(x)$ avec $u(x) = \ln x - x + 1$.
c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_1.

45 Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = -3\ln x + 2x - 4.$$
1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. En $+\infty$, on vérifiera que $g(x) = x\left(-\dfrac{3\ln x}{x} + 2\right) - 4$ et on utilisera $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. Déterminer le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_e à $\mathscr{C}_g$ en e, puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_e.

46 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - \dfrac{4}{x}$.
1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

47 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x + \mathrm{e}^{-1}$.
1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
3. Justifier alors que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ $x\ln x \geqslant -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Dérivées de fonctions du type ln *u*

Méthode 6 p. 99

48 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln(8x - 4)$ **b)** $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{2x + 4}\right)$ **d)** $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$

49 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln\sqrt{4 - x}$ **b)** $f(x) = \ln(\ln 2x)$

c) $f(x) = x^2\ln(\mathrm{e}^x + 1)$ **d)** $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \ln\left((4x - 1)^2\right)$ **f)** $f(x) = \left(\ln(x^2 - 1)\right)^2$

ln *x* et fonctions auxiliaires

Méthode 7 p. 100

50 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$
1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
b) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

51 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = (x + 1)\ln x.$$
1. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\ln x + x + 1$.
a) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $]0\,;+\infty[$.
b) En déduire le signe de h sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$.
b) En déduire le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variations de g en y incluant les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que la valeur en laquelle la fonction g s'annule.

Étude de fonctions avec ln *u*

Méthode 8 p. 101

52 Pour chacune des fonctions ci-dessous :
1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier le sens de variation de f.

a) $f(x) = \ln(3 - 4x)$; $I = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2 - x}{x + 1}\right)$; $I =]-1\,;2[$

53 Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(-x^2 + 2x + 15)$.
1. Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de g.
2. Étudier le sens de variation de g sur son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g au point d'abscisse 0.

54 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(2x + 1)$ et $g(x) = \ln(4 - x)$.
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g.
2. Étudier la position relative des deux courbes sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;4\right[$.

55 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ et $g(x) = \ln(-3x + 15)$.
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g.
2. Étudier la position relative des deux courbes sur $]-1\,;5[$.

Exercices d'entraînement

La fonction ln

56 Soit la fonction g définie sur $]0\,;\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}.$$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition de g.

2. a) Montrer que $g'(x)=-\dfrac{2}{x(\ln x-1)^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de g sur son ensemble de définition.

57 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2(\ln(x))^2-\ln x-1.$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

2. a) Résoudre l'équation $2X^2-X-1=0$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions qui sont e et $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

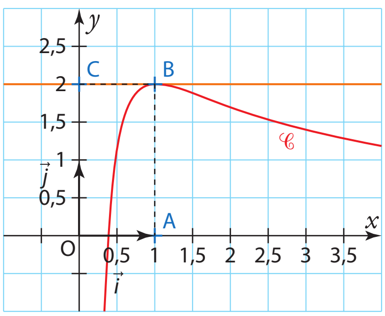
3. a) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\mathrm{e}\right]$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=-1$ admet exactement deux solutions α et β sur cet intervalle.

c) Déterminer les valeurs exactes de α et β en résolvant directement l'équation $f(x)=-1$.

4. Justifier que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f, au point d'abscisse e est $T_{\mathrm{e}}:y=\dfrac{3}{\mathrm{e}}x-3$.

58 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, **Algo**
dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

– les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;

– la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

– il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire que $f(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}$.

2. a) Justifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un réel β de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$. Déterminer l'entier n tel que $n<\beta<n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous écrit en langage **Python**.

```
from math import*
def f(x):
      image=2/x+2*math.log(x)/x
      return image
a=1
b=1
while b-a>0.1:
      m=1/2*(a+b)
      if f(m)<1 :
            a=m
      else :
            b=m
print(a,b)
```

a) Quel est le rôle de la fonction Python f ?

b) Quel est le rôle de ce programme ?

c) Quelle instruction Python faudrait-il modifier afin que ce programme affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} ?

D'après Bac S, 2013.

59 On peut lire sur le site France-inflation.com **SES**
un tableau de l'inflation des prix en France.

2011	2,1 %
2010	1,5 %
2009	0,1 %
2008	2,8 %
2007	1,5 %
2006	1,6 %
2005	1,9 %
2004	2,1 %
2003	2,1 %
2002	2 %

1. Le passage à l'Euro a eu lieu en 2002. À partir de 2002, quel est le pourcentage d'augmentation totale des prix sur 10 ans ?

2. On appelle t le pourcentage d'augmentation par année qui conduirait sur 10 ans à la même augmentation totale. Déterminer t à 10^{-2} près.

60 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative.

A ▶ Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = -2\ln x - xe + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g.

3. Montrer que dans $[0{,}5\,;1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B ▶ Étude de la fonction f

1. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.

3. Donner le tableau de variations de f.

4. Tracer Γ.

Fonctions du type ln *u*

61 Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1-2\ln(x+1)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

2. Montrer qu'il existe un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminer l'équation de cette tangente.

3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ et de la droite d d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

62 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, où a, b, et c sont trois réels.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$ ↘	$\ln 2$ ↘	$\ln\left(\frac{7}{8}\right)$	↗ 0	↗ $+\infty$

1. En utilisant les données du tableau, montrer que $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$.

2. a) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que les variations et les informations portées sur le tableau ci-dessus sont exactes.

Modélisations

63 SVT

Dans un bouillon de culture, on observe, au temps $t = 0$, la présence de 10 000 bactéries.

Ce nombre est multiplié par 1,5 toutes les heures. On modélise la situation à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec u_n représentant le nombre de bactéries présentes dans le bouillon de culture n heures après la première observation.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le 1er terme u_0 et la raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. En déduire au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura dépassé le million.

64 Un capital de 1 200 € est placé à un taux annuel composé de 2 % au 1er janvier 2020.

On modélise la situation par une suite (u_n) telle que u_n représente le capital à l'année $2020 + n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le 1er terme et la raison.

2. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il triplé ?

65 L'**intensité sonore** totale I de plusieurs ondes d'intensités I_1 et I_2 correspond à la somme de chacune des intensités sonores : $I = I_1 + I_2$. L'amplitude de l'intervalle de l'intensité sonore perceptible étant de l'ordre de 10^{13} (le seuil d'audibilité étant de $10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$), on utilise plutôt une échelle de grandeur plus simple et plus significative qui est le **niveau d'intensité sonore**.

Cette grandeur, notée L, s'exprime en décibels (dB) et est définie par $L=10\times\log\dfrac{I}{I_0}$ avec I l'intensité en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ et $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

Remarque La notation log correspond au logarithme décimal. Cette fonction possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien (ln).

1. On veut chercher à montrer que si on quadruple l'intensité sonore, le niveau sonore quant à lui n'est pas quadruplé.

On pose $I = 5\times10^{-6}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$; $L=10\times\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$dB le niveau sonore associé, k le coefficient par lequel on multiplie l'intensité sonore et L' le niveau sonore associé à l'intensité $k\times I$. On suppose que l'intensité sonore associée à chaque chanteur est la même et vaut I, que le niveau d'intensité sonore associé à chacun d'entre eux est L et on pose L' le niveau sonore associé à l'ensemble du groupe.

a) Vérifier que $L' = 10\ \square\ \log\dfrac{4I}{I_0}$.

b) Montrer que $L' \approx 6 + L$.

Remarque Quadrupler l'intensité sonore revient à augmenter de 6 dB le niveau sonore et non à le multiplier par 4.

2. Démontrer de la même façon que si l'on divise par 5 l'intensité sonore, cela revient à baisser de 7 dB le niveau sonore.

Exercices bilan

66 Étude d'une fonction ln

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la limite de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire l'existence d'asymptotes pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2(\ln x - 1)}{x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4. Construire $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

67 Avec une fonction auxiliaire

A ▶ Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

B ▶ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

C ▶ Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction g définie par $g(x) = \ln(x)$.

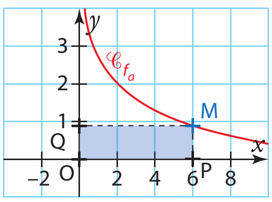
1. Montrer que, pour tout réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

2. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.

D'après Bac S, Amérique du Nord, 2015.

68 Calcul d'aire et étude de ln

Soit f_a la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_a(x) = a - \ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathscr{C}_{f_a}$ la courbe représentative de f_a, tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

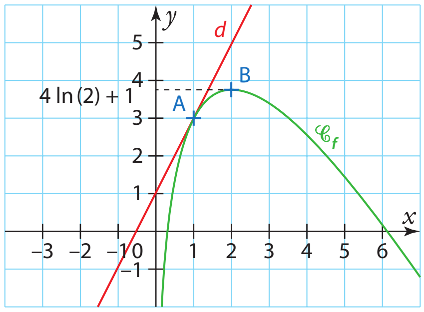


1. À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_{f_a}$ on associe le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q, projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées de M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

2. Existe-t-il plusieurs valeurs de a pour lesquelles cette aire maximale soit atteinte en M ayant pour abscisse a ?

69 Paramètres et fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous et d la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



L'expression de f est du type $f(x) = a\ln x + bx + c$ avec a, b, c trois réels.

A ▶ 1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$; $f'(1)$ et $f(2)$.

2. En déduire l'expression de f.

3. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 3$.

B ▶ On admettra pour la suite de l'exercice que :

$$f(x) = 4\ln x - 2x + 5.$$

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2\ln x - x + 1$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2. En déduire le tableau de variations de g.

3. Vérifier que 1 est solution de l'équation $g(x) = 0$.

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

On donnera une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de g.

6. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$.

70 ln u et tangente

f est une fonction définie sur $]-5\,;5[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{5-x}{5+x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

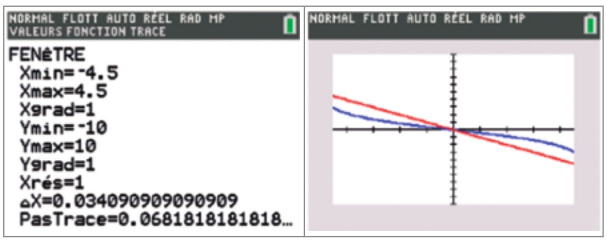
1. Pour tout réel $x \in\,]-5\,;5[$, montrer que $f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire quant aux éléments de symétrie de $\mathscr{C}$?

2. a) Déterminer la limite de f en -5. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]-5\,;0]$.

c) Montrer que la droite d d'équation $y = -0{,}4x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d ont été tracées à l'aide de la calculatrice.



a) Quelle conjecture peut-on faire quant à la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente d ?

b) Démontrer cette conjecture.