Exercice 1 — Densité de population urbaine

Un modèle de densité urbaine est une formule qui lie la densité de population (en nombre de personnes par unité de surface) à la distance x au centre de la ville (en unité de longueur).

Pour la ville de Lyon, notons $L(x)$ la densité de population en nombre d'habitants par km^2, en fonction de la distance x, en km, au centre de la ville. D'après un modèle de densité (source : rapport de l'INRETS), on a :

$$L(x) = 23\ 349 \times 0,74^x$$

1. (a) Calculez la densité urbaine à 2 km du centre ville, au centre ville et à 10km du centre ville.
   (b) Donnez l'allure de la courbe représentative de la fonction L pour $x \in [0; 12]$.

Pour la ville de Marseille, notons $M(x)$ la densité de population correspondante. On a :

$$M(x) = 11\ 880 \times 0,8^x$$

2. (a) Calculez la densité urbaine au centre ville et à 10 km du centre ville.
   (b) Donnez l'allure de la courbe représentative de la fonction M pour $x \in [0; 12]$ sur le même graphique que précédemment.

On souhaite maintenant faire une analyse comparative. À l'aide du graphique :

3. (a) Donnez une valeur approchée de la distance x_0 pour laquelle $L(x_0) = M(x_0)$.
   (b) Faites une analyse des densité urbaines à Lyon et à marseille dans un rayon de 12km du centre de ces villes.

Exercice 2 — Les projets agronomiques de Bouvard et Pécuchet

Après leurs malheureuses expériences "agronomiques", Bouvard et Pécuchet ne seraient-ils pas à la veille de changer de projet ? Pour étudier l'hypothèse suggérée par Bouvard, on utilisera à bon escient une formule concernant les intérêts composés, pour lesquels une somme C placée au taux t devient $C(1+t)^n$ au bout de n années.

Bouvard lui répondit :

- Tu verras dans Gasparin que le bénéfice ne peut dépasser le dixième du capital. Donc on ferait mieux de placer ce capital dans une maison de banque. Au bout de quinze ans, par l'accumulation des intérêts, on aurait le double sans s'être foulé le tempérament.

Pécuchet baissa la tête.

- L'arboriculture pourrait bien être une blague !

- Comme l'agronomie ! répliqua Bouvard.

Ensuite, ils s'accusèrent d'avoir été trop ambitieux, et ils résolurent de ménager désormais leur peine et leur argent. Un émondage de temps à autre suffirait au verger. Les contre-espaliers furent proscrits et ils ne remplaceraient pas les arbres morts ; mais il allait se présenter des intervalles fort vilains, à moins de détruire tous les autres qui restaient debout. Comment s'y prendre ?

Pécuchet fit plusieurs épures, en se servant de sa boîte de mathématiques. Bouvard lui donnait des conseils. Ils n'arrivaient à rien de satisfaisant. Heureusement qu'ils trouvèrent dans leur bibliothèque l'ouvrage de Boitard, intitulé *L'Architecte des jardins*.

Gustave Flaubert, *Bouvard et Pécuchet*

Existe-t-il vraiment un taux de placement qui permettrait à Bouvard et Pécuchet de doubler leur capital ?

Exercice 3 — Résoudre les équations suivantes :

1. $4^{x-2} = 16$
2. $3^x = 3^{2x-1}$
3. $8^x = 2$
4. $2^6 = 2^{4x-2}$
5. $0,1^x = 0,001$
6. $4^{x+2} = 1$

Exercice 4

Une denrée alimentaire est placée dans un congélateur maintenu à la température de -30°C. Lorsque cette denrée reste placée dans le congélateur pendant une durée t, exprimée en heures, la température à cœur $C(t)$ de cette denrée, exprimée en °C, est donnée par :

$$C(t) = a \times 10^{-kt} - 30$$

1. Déterminer a sachant que $C(0) = 5$.
2. Calculer la valeur exacte de k sachant qu'au bout d'une heure, la température à cœur est égale à -23°C.
3. Déterminer par le calcul le temps nécessaire pour que la température atteigne -25°C.

Exercice 5 — Médicament

Un groupe de chercheurs étudie l'élimination d'un médicament dans le sang. À partir d'un instant initial, on mesure pendant 24 heures la concentration en grammes par litre (g.L^{-1}) de médicament restant dans le sang du patient. Si t mesure le temps en heures, la concentration $f(t)$ à l'instant t est donnée par la formule $f(t) = 1,2 \times 0,67^t$ pour tout nombre réel de $[0; 24]$.

1. Donner un tableau de valeurs de la fonction et représenter la fonction dans une échelle bien choisie.
2. Les chercheurs utilisent l'algorithme ci-dessous. Quel est le rôle de l'algorithme ? Exécuter l'algorithme à la main (en expliquant) pour trouver quelle valeur on obtient en sortie de l'algorithme lorsque $C = 0,5$. Idem lorsque $C = 0,2$.

Algorithme de calcul.

Variables :
t et C sont deux nombres réels.

Corps de l'algorithme :
Lire la variable C
t **prend la valeur** 0
Tant que $1,2 \times 0,67^t \geq C$, **Faire**
    t **prend la valeur** $t+1$
Fin_Tant_que
Afficher la variable t

3. On admet que le médicament est éliminé lorsque la concentration est inférieure à $0,06$ g.L^{-1}. Saisir l'algorithme en python dans votre calculatrice et déterminer au bout de combien de temps le médicament sera éliminé.

   Indications :
   - plutôt que de lire la variable C, on pourra juste lui assigner une valeur directement dans le corps du programme. Si vous voulez un programme interactif, appelez-moi ;
   - la boucle « tant que » s'écrit `while` en python ;
   - a^b, en python, s'écrit `a**b` ;
   - pour afficher une variable, on utilise la fonction `print`.