

|               |          |            |                |        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------|----------|------------|----------------|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Connaissances | Méthodes | Résolution | Interprétation | Barème | On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses (ce qui inclut l'obligation de justifier). Sur le total, <u>1 point</u> est dévolu à cela.<br><br>Chaque question est annotée à gauche avec le nombre de points et les compétences évaluées. |
|---------------|----------|------------|----------------|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Exercice 1

6 points

|  |   |  |  |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--|---|--|--|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |   |  |  |   | Une école compte 500 étudiants, parmi lesquels : <ul style="list-style-type: none"><li>• 300 jouent d'un instrument de musique ;</li><li>• 220 font partie de la chorale.</li></ul> La probabilité qu'un étudiant choisi au hasard joue d'un instrument et chante dans la chorale est 25%. |
|  | ✓ |  |  | 1 | 1. Traduire la situation à l'aide d'un tableau ou d'un diagramme.                                                                                                                                                                                                                          |
|  | ✓ |  |  | 1 | 2. Combien d'étudiants font partie de la chorale et jouent également d'un instrument de musique ?                                                                                                                                                                                          |
|  | ✓ |  |  | 1 | 3. Trouver la probabilité qu'un élève choisi au hasard fasse partie de la chorale mais ne joue d'aucun instrument.                                                                                                                                                                         |
|  | ✓ |  |  | 1 | 4. Trouver la probabilité qu'un membre de la chorale ne joue d'aucun instrument.                                                                                                                                                                                                           |
|  | ✓ |  |  | 2 | 5. Trouver la probabilité qu'un étudiant ne jouant d'aucun instrument fasse partie de la chorale.                                                                                                                                                                                          |

1. Mise en mathématiques de l'énoncé : ici on peut faire un tableau à double entrée ou un diagramme de Venn (mais un arbre n'est pas vraiment adapté). Le plus simple est le tableau à double entrée, car on peut directement reporter les nombres de l'énoncé (en rouge).

| Instrument \ Chorale | Oui             | Non | Total |
|----------------------|-----------------|-----|-------|
|                      |                 |     |       |
| Oui                  | 25% × 500 = 125 | 95  | 220   |
| Non                  | 175             | 105 | 280   |
| Total                | 300             | 200 | 500   |

2. On peut directement lire dans le tableau qu'il y a 125 élèves qui font partie de la chorale et jouent d'un instrument.

Pour la suite de l'exercice, si on choisit un élève au hasard dans l'école, on va noter  $C$  = "l'élève fait partie de la chorale" et  $I$  = "l'élève joue d'un instrument".

3. Ici on demande  $P(C \cap \bar{I})$ . On lit dans le tableau  $\frac{\text{effectif}(C \cap \bar{I})}{\text{effectif total}} = \frac{95}{500} = 0,19$ .
4. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on sait qu'il fait partie de la chorale. On demande donc  $P_C(\bar{I})$ . On lit dans le tableau  $\frac{\text{effectif}(C \cap \bar{I})}{\text{effectif}(C)} = \frac{95}{220} = \frac{19}{44}$ .
5. Cette fois-ci on parle d'un élève dont on sait qu'il ne joue pas de musique. On demande donc  $P_{\bar{I}}(C)$ . On lit dans le tableau  $\frac{\text{effectif}(\bar{I} \cap C)}{\text{effectif}(\bar{I})} = \frac{95}{200} = 0,475$ .

|   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---|---|---|---|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |   |   |   |   | <p>Un test de dépistage d'une maladie contagieuse est mis au point :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2% des cas ;</li> <li>• pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,12% des cas.</li> </ul> <p>On suppose qu'une maladie touche 1,5% de la population d'un pays et qu'on décide de faire passer ce test à tous les habitants. On considère, pour un habitant donné, les événements : <math>M</math> : « Cet habitant est malade. » et <math>T</math> : « Le test est positif. »</p> |
| ✓ | ✓ |   |   | 2 | <p>1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous afin qu'il représente la situation.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| ✓ | ✓ |   |   | 2 | 2. Calculer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| ✓ |   | ✓ | ✓ | 2 | 3. En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif. Que penser de ce résultat ?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|   |   |   | ✓ | 1 | 4. Les personnes testées positives lors de ce test (et uniquement celles-ci) sont mises en quarantaine. Si le pays compte un million d'habitants, estimer le nombre de personnes qui seront mises en quarantaine à l'issue de ce test systématique.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|   |   |   |   |   | <p>BONUS — Par une méthode similaire, estimer le nombre de personnes qui ne seront pas mises en quarantaine alors qu'elles étaient malades.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

1. L'arbre a été complété en rouge.

2. La branche du haut correspond à l'événement  $M \cap T$ , du coup  $P(M \cap T) = 0,015 \times 0,9988 = \boxed{0,014982}$ .  
 L'événement  $T$  est présent sur deux branches de l'arbre, on peut donc calculer  $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,014982 + 0,985 \times 0,02 = \boxed{0,034682}$ .

3. Ici on nous demande de calculer  $P_T(M)$ , ce qu'on peut faire à l'aide de la formule :  $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,014982}{0,034682} \approx \boxed{0,43}$ .

Cela veut dire que, lorsque le test est positif, en fait on est loin d'être certains que l'on soit malade. Il faudra donc dans la pratique soit prendre le plus de précautions possibles (au cas où on est vraiment malade), soit refaire un autre test (indépendant !) si vraiment on veut savoir avec certitude si l'on est malade ou pas.

4. On a une probabilité de 0,034682 d'être testé positif, donc sur un million d'habitants, cela nous donne environ  $\boxed{34\,682}$  personnes à mettre en quarantaine.

BONUS — On calcule  $P(M \cap \bar{T}) = 0,015 \times 0,0012 = 0,000018$ , ce qui nous donne environ  $\boxed{18}$  personnes restées hors quarantaine alors qu'elles étaient malades. On comprend mieux pourquoi ce test donnait beaucoup de faux positifs (de personnes testées positives alors qu'elle n'étaient pas malades) : on a voulu avoir très peu de faux négatifs.

|                   |      |               |       |   | Annie a une collection d'éléphants miniatures dont la répartition est donnée ci-dessous.                                                                                                                                                                                                                                                   |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
|-------------------|------|---------------|-------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------|---------------|-------|------|----|-----|-----|--------|----|----|----|-------|----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|
|                   |      |               |       |   | <table><tr><th>Couleur \ Matière</th><th>Noir</th><th>Autre couleur</th><th>Total</th></tr><tr><td>Bois</td><td>45</td><td>135</td><td>180</td></tr><tr><td>Pierre</td><td>31</td><td>58</td><td>89</td></tr><tr><td>Métal</td><td>29</td><td>122</td><td>151</td></tr><tr><td>Total</td><td>105</td><td>315</td><td>420</td></tr></table> | Couleur \ Matière | Noir | Autre couleur | Total | Bois | 45 | 135 | 180 | Pierre | 31 | 58 | 89 | Métal | 29 | 122 | 151 | Total | 105 | 315 | 420 |
| Couleur \ Matière | Noir | Autre couleur | Total |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
| Bois              | 45   | 135           | 180   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
| Pierre            | 31   | 58            | 89    |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
| Métal             | 29   | 122           | 151   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
| Total             | 105  | 315           | 420   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
|                   |      |               |       |   | Chaque semaine, elle tire au sort un éléphant pour le mettre sur son bureau au travail. On considère les événements :                                                                                                                                                                                                                      |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
|                   |      |               |       |   | <ul style="list-style-type: none"><li>• N : « L'éléphant est noir. »</li><li>• B : « L'éléphant est en bois. »</li><li>• M : « L'éléphant est en métal. »</li></ul>                                                                                                                                                                        |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
| ✓                 | ✓    |               |       | 3 | 1. Calculer $P_B(N)$ , $P_{\overline{N}}(B)$ et $P_{B \cup M}(N)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                        |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
| ✓                 | ✓    |               |       | 2 | 2. Les événements N et M sont-ils indépendants ? Les événements N et B sont-ils indépendants ?                                                                                                                                                                                                                                             |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |
|                   |      | ✓             |       | 1 | 3. Annie vend ses éléphants en bois noir. Dans la nouvelle configuration, que penser, sans calcul, de l'indépendance des événements N et B ?                                                                                                                                                                                               |                   |      |               |       |      |    |     |     |        |    |    |    |       |    |     |     |       |     |     |     |

Tout d'abord, j'ai complété le tableau à double entrée (en rouge).

1. Pour  $P_B(N)$ , on lit dans le tableau  $\frac{\text{effectif}(B \cap N)}{\text{effectif}(B)} = \frac{45}{180} = \boxed{0,25}$ .
- Pour  $P_{\overline{N}}(B)$ , on lit dans le tableau  $\frac{\text{effectif}(\overline{N} \cap B)}{\text{effectif}(\overline{N})} = \frac{135}{315} = \boxed{\frac{3}{7}}$ .
- Pour  $P_{B \cup M}(N)$ , on lit dans le tableau  $\frac{\text{effectif}((B \cup M) \cap N)}{\text{effectif}(B \cup M)}$ . On remarque que  $(B \cup M) \cap N$  a  $45 + 29 = 74$  éléments, et il vient donc que  $P_{B \cup M}(N) = \boxed{\frac{74}{331}}$ .
2. Pour savoir si les événements N et M sont indépendants, on peut se demander si  $P_N(M) = P(M)$ . On calcule  $P_N(M) = \frac{\text{effectif}(N \cap M)}{\text{effectif}(N)} = \frac{29}{105} \approx 0,28$ . On calcule  $P(M) = \frac{151}{420} \approx 0,36$ . Ce n'est pas la même chose, donc 

N et M ne sont pas indépendants

.
- Pour savoir si les événements N et B sont indépendants, on peut se demander si  $P_N(B) = P(B)$ . On a déjà calculé  $P_N(B) = \frac{3}{7}$ . On calcule  $P(B) = \frac{180}{420} = \frac{3}{7}$ . C'est la même chose, donc 

N et B sont indépendants

.
3. Si Annie vend ses 45 éléphants en bois noir, alors clairement les événements N et B 

ne sont pas indépendants

. Effectivement, dès qu'on sait que l'un des deux événements est réalisé, on sait que la probabilité de l'autre vaut 0 (ce qui n'est clairement pas le cas sinon).