Connaissances	Méthodes	Résolution	Interprétation	Barème	
					On accordera une attention particulière, à ce devoir comme à tous les autres, à l'orthographe, la présentation et la rédaction des réponses (ce qui inclut l'obligation de justifier). Sur le total, 1 point est dévolu à cela. Chaque question est annotée à gauche avec le nombre de points et les compétences évaluées. Rappel : si vous ne savez pas comment commencer un exercice… faites un dessin !

Exercice 1 **2 points**

✓	✓			2	On donne $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = 6$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \frac{5\pi}{6}$. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (on donnera le résultat exact sous forme la plus simple possible puis une valeur arrondie à 0,1 près).

On utilise la formule $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 3 \times 6 \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 18 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = \boxed{-9\sqrt{3} \approx -15,6}$.

Exercice 2 **2 points**

✓	✓			2	On donne $\|\overrightarrow{a}\| = 2$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \sqrt{3}$ et $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\sqrt{6}$. Calculer les valeurs possibles en degrés (dans $[0; 360°[$) et en radians (dans $[0; 2\pi[$) de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

Si on appelle θ l'angle entre les deux vecteurs, on utilise également la formule $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \cos(\theta)$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
-\sqrt{6} &= 2 \times \sqrt{3} \times \cos(\theta) && \div(2\sqrt{3}) \\
-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} &= \cos(\theta) && \text{Simplification par } \sqrt{3} \\
-\frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos(\theta)
\end{aligned}$$

On reconnaît là une valeur remarquable, ce qui donne $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Donc en radians dans l'intervalle demandé θ peut valoir $\boxed{\frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4}}$, en degrés cela donne $\boxed{135° \text{ ou } 225°}$.

Exercice 3 **2 points**

	✓	✓		2	On donne D(3; −1) ; E(1; 3) ; F(0; −2) et G(6; 1). Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont-ils orthogonaux ?

Ici on va calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG}$, et pour cela le plus simple est de calculer les coordonnées :

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} \text{ et } \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}.$$

On trouve donc $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{FG} = (-2) \times 6 + 4 \times 3 = -12 + 12 = 0$, donc $\boxed{\text{ces vecteurs sont orthogonaux}}$.

Exercice 4 **2 points**

	✓	✓		2	Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ x - 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Déterminer la ou les valeur(s) de x pour que les deux vecteurs soient orthogonaux.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux quand leur produit scalaire est nul :

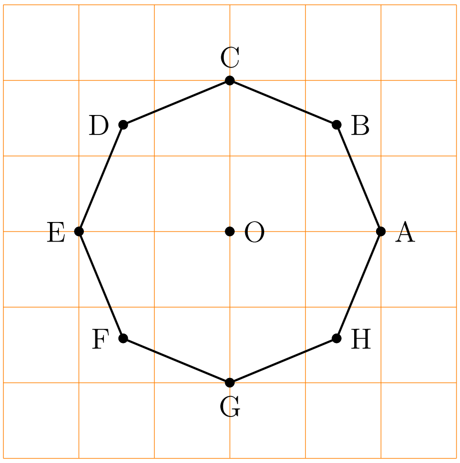
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \times (3x-1) + (x-5) \times 10 &= 0 && \\
& && \text{On développe} \\
\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} + 10x - 50 &= 0 && \\
& && \text{On multiplie par 2 (pour se débarasser des fractions)} \\
3x - 1 + 20x - 100 &= 0 && \\
& && \text{On simplifie} \\
23x - 101 &= 0 && \\
& && +101 \\
23x &= 101 && \\
& && \div 23 \\
x &= \frac{101}{23} &&
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{101}{23}\right\}}$.

Exercice 5 **4 points**

					Dans un repère orthonormé de centre O, on donne A$(2;0)$. On construit l'octogone régulier ABCDEFGH de centre O.
	✓		✓	2	1. Donner les coordonnées des sommets de cet octogone.
		✓	✓	2	2. Montrer que ACEG est un carré.

1. On fait un dessin pour s'aider. L'octogone est de centre O donc tous les points sont à distance 2 de O ; il est régulier donc comme il y a 8 points, les angles $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right)$... sont tous égaux à $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Cela donne le dessin suivant :



   Sur le dessin et d'après ce qu'on a déjà dit il est clair que A$(2;0)$, C$(0;2)$, E$(-2;0)$ et G$(0;-2)$. Le point B est à distance 2 de O et l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit (théorème de Pythagore ou trigonométrie) que B$(\sqrt{2};\sqrt{2})$. De même, pour les 3 autres points qui ne sont pas sur le quadrillage et par symétries, on a D$(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, F$(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ et H$(\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

2. Avec les coordonnées des points A$(2;0)$, C$(0;2)$, E$(-2;0)$ et G$(0;-2)$ il vient rapidement que AC $=$ CE $=$ EG $=$ GA $= 2\sqrt{2}$. On calcule $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2) \times (-2) + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$, donc ces vecteurs sont orthogonaux ainsi $\boxed{\text{on a bien un carré}}$.