Chapitre 4.
Variations, dérivées

Yann Barsamian

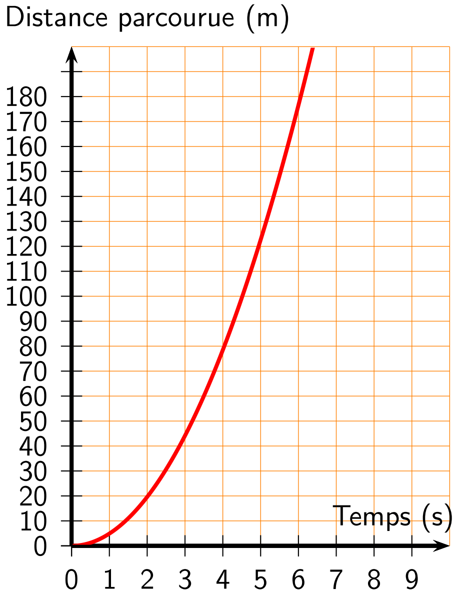
École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023

Objectifs de ce chapitre

Dans ce chapitre, nous allons :

- réviser la notion de droite
- comprendre une nouvelle notion : la tangente à une courbe, le nombre dérivé
- découvrir des formules et des applications de la dérivée

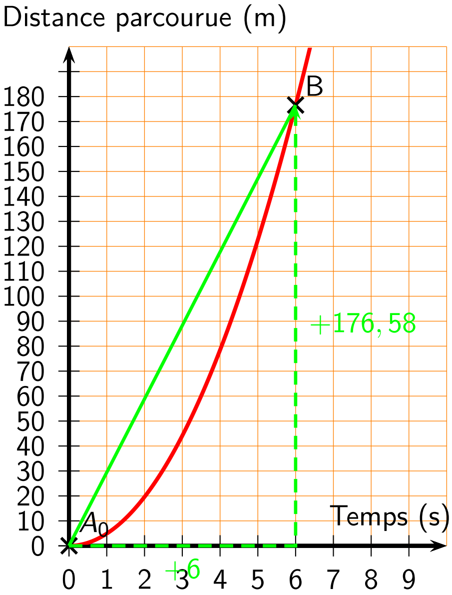


Ci-contre on a $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$.

Le calcul de la vitesse moyenne se fait en regardant le coefficient directeur de la sécante. Par exemple :

- Sur $[0;6]$:
- Sur $[2;6]$:
- Sur $[4;6]$:

Quand A se rapproche de plus en plus de B, on a la tangente à la courbe au point B. La vitesse instantanée en 6 est :

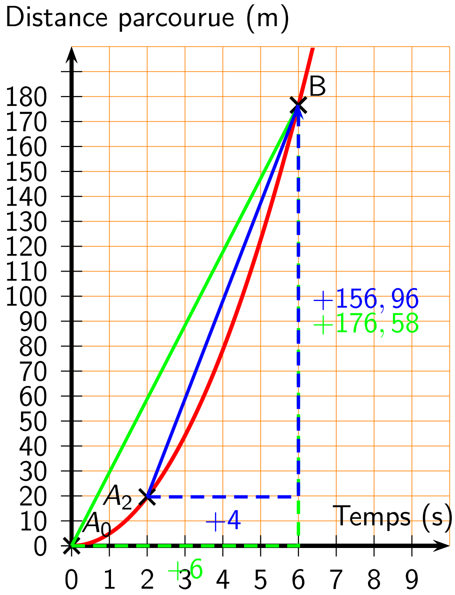


Ci-contre on a $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$.

Le calcul de la vitesse moyenne se fait en regardant le coefficient directeur de la sécante. Par exemple :

- Sur $[0;6]$: $\dfrac{+176,58}{+6} \approx 29,43$
- Sur $[2;6]$:
- Sur $[4;6]$:

Quand A se rapproche de plus en plus de B, on a la tangente à la courbe au point B. La vitesse instantanée en 6 est :

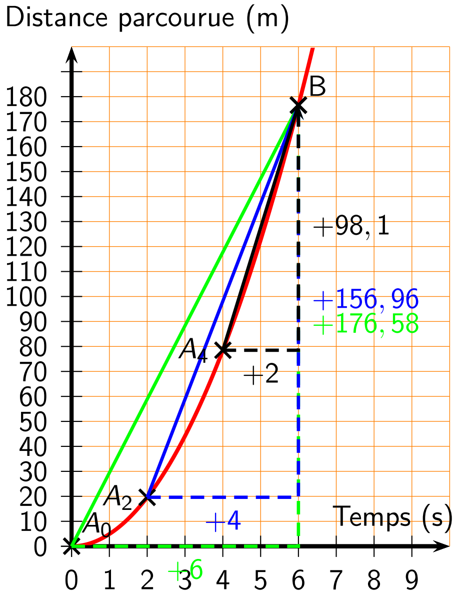


Ci-contre on a $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$.

Le calcul de la vitesse moyenne se fait en regardant le coefficient directeur de la sécante. Par exemple :

- Sur $[0;6]$: $\dfrac{+176,58}{+6} \approx 29,43$
- Sur $[2;6]$: $\dfrac{+156,96}{+4} \approx 39,24$
- Sur $[4;6]$:

Quand A se rapproche de plus en plus de B, on a la tangente à la courbe au point B. La vitesse instantanée en 6 est :



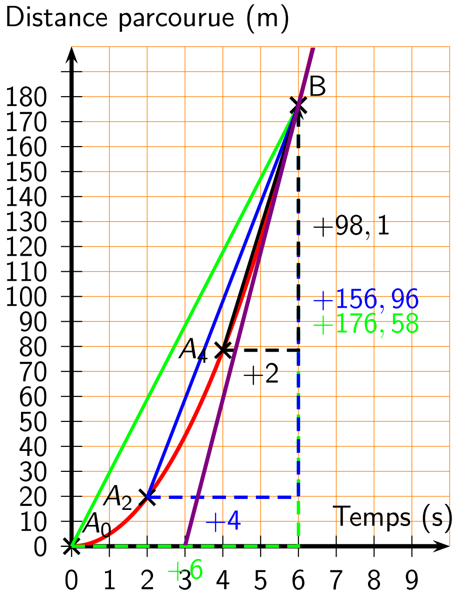
Ci-contre on a $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$.

Le calcul de la vitesse moyenne se fait en regardant le coefficient directeur de la sécante. Par exemple :

- Sur $[0; 6]$: $\dfrac{+176,58}{+6} \approx 29,43$
- Sur $[2; 6]$: $\dfrac{+156,96}{+4} \approx 39,24$
- Sur $[4; 6]$: $\dfrac{+98,1}{+2} \approx 49,05$

Quand A se rapproche de plus en plus de B, on a la tangente à la courbe au point B. La vitesse instantanée en 6 est :

I/ Taux de variation moyen et instantané



Ci-contre on a $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$.

Le calcul de la vitesse moyenne se fait en regardant le coefficient directeur de la sécante. Par exemple :

- Sur $[0; 6]$: $\dfrac{+176,58}{+6} \approx 29,43$
- Sur $[2; 6]$: $\dfrac{+156,96}{+4} \approx 39,24$
- Sur $[4; 6]$: $\dfrac{+98,1}{+2} \approx 49,05$

Quand A se rapproche de plus en plus de B, on a la tangente à la courbe au point B. La vitesse instantanée en 6 est : la pente de la tangente.

Taux de variation moyen

Soit f une fonction, soient a et b deux nombres (dans $\mathcal{D}_f$). On note $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$. Le taux de variation moyen de f entre a et b est la pente de (AB).

Pente d'une droite

Rappel : la pente d'une droite (AB) se calcule comme $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Remarque : cela n'a pas d'importance si on commence par B ou par A dans le calcul, du moment qu'on utilise le même ordre au numérateur et au dénominateur.

I/ Taux de variation moyen et instantané

Sur la figure précédente, on a noté $B(6; f(6))$, $A_0(0; f(0)) = (0; 0)$, $A_2(2; f(2)) = (2; 19,62)$ et $A_4(4; f(4)) = (4; 78,48)$. On peut rajouter $A_5(5; f(5)) = (5; 122,625)$ et $(A_{5,5}(5,5; f(5,5)) \approx (5,5; 148,37625)$. Le calcul donne :

- La pente de (A_0B), c'est $\dfrac{176,58 - 0}{6 - 0} \approx 29,43$
- La pente de (A_2B), c'est $\dfrac{176,58 - 19,62}{6 - 2} \approx 39,24$
- La pente de (A_4B), c'est $\dfrac{176,58 - 78,48}{6 - 4} \approx 49,05$
- La pente de (A_5B), c'est $\dfrac{176,58 - 122,625}{6 - 5} \approx 53,96$
- La pente de $(A_{5,5}B)$, c'est $\dfrac{176,58 - 148,37625}{6 - 5,5} \approx 56,41$

Quand le point $A(a; f(a))$ se rapproche de B, la sécante se rapproche de plus en plus de la tangente. La pente de la sécante, elle, se rapproche de plus en plus d'une la valeur environ égale à $58,86$.

Taux de variation instantané, ou dérivée

Soient f une fonction, a un nombre (dans $\mathcal{D}_f$). On note $A(a; f(a))$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. Le taux de variation instantané, ou nombre dérivé d'une fonction f en a est la pente de la tangente à la courbe au point A.

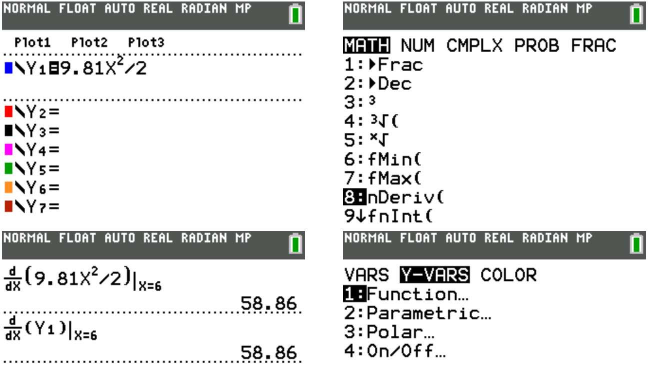
On note ce nombre $\boxed{f'(a)}$ ou $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)}$.

La calculatrice calcule les dérivées, elle note ce nombre $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))|_{x=a}$.

I/ Utilisation de la calculatrice : Numworks

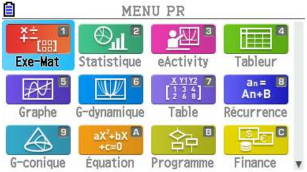
- Sauvegarder $f(x) = \dfrac{9,81x^2}{2}$ (dans Fonctions)
- Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))|_{x=6}$ (dans Calculs, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))|_{x=a}$: boîte à outils, touche en-dessous de Ok, puis Analyse).

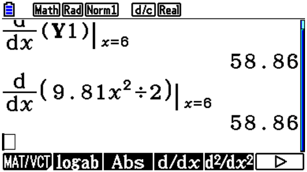
- Sauvegarder $Y1 = \dfrac{9.81x^2}{2}$ (dans $f(x)$)
- Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(9.81X^2/2)|_{X=6}$ (touche `math` puis `8: nbreDérivé()` ou $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(Y1)|_{X=6}$ (le symbole $Y1$ se trouve dans la touche `var` puis `Y-vars`, `Function...` et `Y1`).

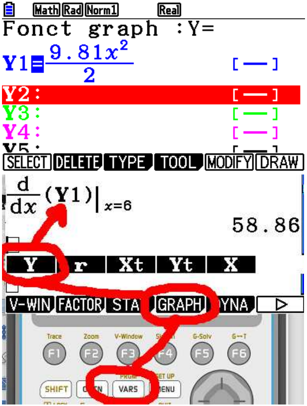


I/ Utilisation de la calculatrice : Casio Graph 90+E

- Sauvegarder $Y1 = \dfrac{9.81x^2}{2}$ (dans `Graphe`)
- Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9.81x^2 \div 2)|_{x=6}$ (dans `Exe-Mat`, touche F4 `MATH` puis `d/dx`) ou $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Y1)|_{x=6}$.







Si $\mathcal{C}_f$ est une droite (vrai quand f est une fonction affine), la tangente à une droite... c'est elle-même. Ainsi, le nombre dérivé, c'est juste le coefficient directeur :

Dérivée d'une fonction affine

Si $f(x) = ax + b$, alors $f'(x) = a$.

Si $f(x) = x^2$, alors :

Dérivée de $f(x) = x^2$

Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Démonstration (hors programme) : on a vu que la valeur $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se rapproche de plus en plus de $f'(a)$ quand x est proche de a. Si $f(x) = x^2$, cela donne $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \dfrac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a$. Cette quantité se rapproche de $2a$ quand x se rapproche de a : $f'(a) = 2a$.

Le formulaire (`http://www.barsamian.am/EE_docs_officiels/S6S7P3_Formulaire_maths_2022-beyond.pdf`) donne la formule qu'il faut maîtriser :

Dérivée de $f(x) = x^n$ (pour $n \geq 1$)

Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Par exemple :

- si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$
- si $f(x) = x^4$, alors $f'(x) = 4x^3$

Et on retrouve bien sûr que :

- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$ (car $x = x^1$ et $x^{1-1} = x^0 = 1$)
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$

N'oublions pas que si $f(x) = c$ (une constante), alors $f'(x) = 0$ (le graphique d'une fonction constante est une droite horizontale, donc pente nulle)

Linéarité de la dérivée

Si f et g sont deux fonctions et que k est un nombre, alors :
La dérivée de $f(x) + g(x)$, c'est $f'(x) + g'(x)$.
La dérivée de $k \times f(x)$, c'est $k \times f'(x)$.

Quand on dérive une somme, il faut faire la dérivée terme par terme. Quand un terme s'écrit un nombre fois une fonction qu'on sait dériver, on garde le nombre, et on dérive la fonction.

Exemple 1 : on veut dériver $f(x) = x^4 + x^2$. On connaît la formule pour dériver x^4, ça donne $4x^3$. On connaît la formule pour dériver x^2, ça donne $2x$. Donc, la dérivée de $f(x)$, c'est la somme de ces deux dérivées : $f'(x) = 4x^3 + 2x$.

Exemple 2 : on veut dériver $g(x) = 5x^3$. On connaît la formule pour dériver x^3, ça donne $3x^2$. Donc, la dérivée de $g(x)$, c'est 5 fois cette dérivée : $g'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

II/ Formules de calcul

La méthode complète sur un exemple plus compliqué : nous voulons dériver $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2,5$.

$$f(x) = x^3 - 1,5 \times x^2 - 6 \times x + 2,5.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1,5 \times 2x - 6 \times 1 + 0.$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3x - 6}.$$

Étape 1 : on écrit chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence (en S6, nos fonctions de références sont les fonctions puissance : ici x^3, x^2, x et les constantes).

Étape 2 : dans chaque terme, on garde la constante et on dérive la fonction de référence.

Étape 3 : on simplifie.

<u>Remarque :</u> la calculatrice ne fait que des calculs de nombres dérivés (pour une valeur de x donnée), et ne donne pas la fonction dérivée.

1) Équation de la tangente

Pour calculer l'équation de la tangente à une courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, on a fait la méthode suivante :

- on cherche l'équation de la tangente $y = mx + p$
- la pente m de la tangente, c'est le nombre dérivé $f'(a)$
- on sait que le point $(a; f(a))$ appartient à la courbe donc on en déduit l'ordonnée à l'origine p de la tangente

Exemple : on cherche l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = -4x^2 + 6x + 1$ à l'abscisse 1. On calcule $f'(x) = -8x + 6$. Donc $f'(1) = -8 \times 1 + 6 = -2$. L'équation de la tangente, c'est donc $y = -2x + p$. Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1, c'est le point $(1; f(1))$ et $f(1) = -4 \times 1^2 + 6 \times 1 + 1 = -4 + 6 + 1 = 3$. Donc, le point $(1; 3)$ est sur la tangente, ainsi on peut écrire :
$3 = -2 \times 1 + p$ c'est-à-dire $5 = p$. L'équation de la tangente est donc $\boxed{y = -2x + 5}$.

Équation de la tangente

L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, c'est : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

La formule est à apprendre par cœur : elle sert chaque année au baccalauréat, et elle n'est pas dans le formulaire ! Pour démontrer ce résultat, on utilise la méthode précédente :

1. le coefficient directeur, c'est $f'(a)$
2. l'équation est donc $y = f'(a) \times x + b$
3. on trouve b en utilisant le fait que le point $(a; f(a))$ est sur la tangente donc $f(a) = f'(a) \times a + b$ ce qui donne $f(a) - f'(a) \times a = b$
4. l'équation est donc $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$, ce qui donne bien, en factorisant par $f'(a)$: $\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$.

Vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=8GUkUdAD4FA`.

2) Signe de f' et variations de f

Variations et dérivée

Soit f une fonction qui admet une dérivée sur un intervalle I.
$f'(x) \geq 0$ sur I si et seulement si f est croissante sur I.
$f'(x) \leq 0$ sur I si et seulement si f est décroissante sur I.
$f'(x) = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.

Exemple : $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 4$:

x	0		1		7		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3) Recherche d'extremums

Extremums locaux

La fonction f admet un extremum local en a si f' s'annule pour la valeur a en changeant de signe.

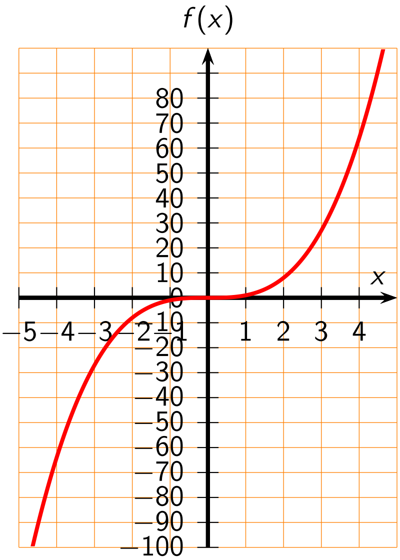
Rappel : un extremum, c'est un minimum ou un maximum.

Remarque : cela veut dire que $f'(a) = 0$ et que le signe de f' juste avant a est différent du signe de f' juste après a.

Cela se voit sur le tableau de variations : à la diapositive précédente, on voit qu'il y a un maximum local à la fonction f en $x = 1$ (car f est croissante avant, puis décroissante après), et de même il y a un minimum local en 7 (car f est décroissante avant, puis croissante après).

<u>Remarque :</u> il est possible d'avoir $f'(a) = 0$ sans avoir d'extremum. Prenons la fonction $f(x) = x^3$ (voir ci-contre) :

1. sa dérivée est $f'(x) = 3x^2$;
2. $f'(0)$ est donc égal à $3 \cdot 0^2 = 0$;
3. et pourtant, il n'y a pas d'extremum en 0 : la fonction est croissante avant 0, continue d'être croissante après 0 ;
4. en 0, on dit alors qu'il y a un <u>point d'inflexion</u> (notion hors programme, c'est le cas quand la courbe de la fonction « traverse » sa tangente).



Vidéo qui récapitule une méthode pour calculer un nombre dérivé :

`https://www.youtube.com/watch?v=hVsRiS5sRkI`

Vidéo qui récapitule une méthode pour tracer la fonction dérivée :

`https://www.youtube.com/watch?v=QCvDn8KI7Bk`

Vidéo qui récapitule une méthode pour tracer une tangente :

`https://www.youtube.com/watch?v=sLNaVabTuVI`