Chapitre 7.
Loi binomiale

Yann Barsamian

École Européenne de Bruxelles 1

Année scolaire 2022–2023

Plan du chapitre

- Processus de Bernoulli (rappel : événements indépendants)
- Loi binomiale (rappel : variable aléatoire)

https://www.lumni.fr/video/les-probabilites-repetition-depreuves-independantes-et-variables-aleatoires

Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{\mathrm{S}}$ ou E), est dite épreuve de Bernoulli.

Processus (ou schéma) de Bernoulli

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un processus (ou schéma) de Bernoulli de taille n.

II/ Loi binomiale

Rappel : dans une expérience aléatoire, une variable aléatoire, c'est une valeur réelle qui peut prendre différents résultats en fonction de l'issue obtenue. Par exemple à un jeu de hasard, le gain espéré est une variable aléatoire (on peut perdre de l'argent, donc avoir un gain négatif).

En S6 on s'intéresse à des variables aléatoires avec un nombre fini de valeurs. On peut alors écrire un tableau qui recense les probabilités des différentes valeurs possibles (la somme fait bien sûr 1).

Exemple : on joue au jeu « Formule Dé »[1]. On doit lancer le dé rouge à 8 faces numérotées 4,5,6,6,7,7,8,8. Si on note X la variable aléatoire qui correspond à la valeur qu'on peut obtenir sur ce dé, on a le tableau suivant :

k	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

1. http://jeuxstrategieter.free.fr/Formule_de_complet.php

Enfin l'exemple qui clôt ce chapitre est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale (cela veut dire, qui se comporte selon la formule de la loi binomiale).

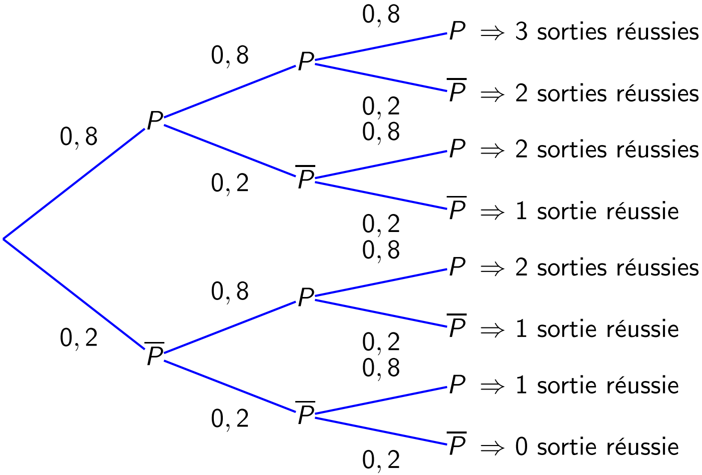
Loi binomiale

Si on a répétition n fois, à l'identique, de manière indépendante, d'une expérience aléatoire à deux issues (« réussite » avec probabilité p et « échec » avec probabilité $1-p$), alors le nombre de succès est donné par la loi binomiale de paramètres n et p : $\mathcal{B}(n,p)$.

La formule dans ce cas est dans votre formulaire, et on va l'expliquer à la diapositive suivante. Pour tout k entre 0 et n (le nombre de répétitions) :

$$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Exemple : on va dans notre restaurant favori 3 fois, et à chaque fois, on a 80% de chances d'avoir une place (noté P), car parfois le restaurant est complet ($\overline{P}$). L'arbre complet est le suivant :



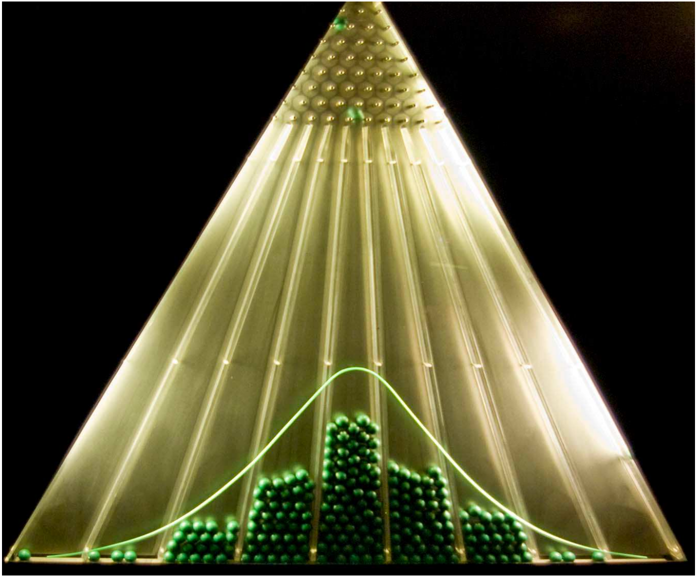
On voit sur l'arbre qu'il y a 3 branches qui correspondent au fait d'avoir 2 sorties réussies sur 3. Sur chaque branche, on a deux fois une arête à $0,8$ et une fois une arête à $0,2$, d'où une probabilité totale :

$$P(X=2) = 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2$$

Ce 3 vient du fait qu'il y a 3 manières possibles de mettre les 2 sorties réussies parmi les 3 fois où on va au restaurant. C'est le calcul des combinaisons de 2 parmi 3, qu'on écrit C_3^2. Dans le cas général, cela correspond au C_n^k du formulaire.

On ne demande pas de retenir la formule (elle est dans le formulaire), on demande d'être capable de reconnaître quand on peut l'appliquer, et d'utiliser la calculatrice pour le faire (sauf éventuellement sur des cas simples comme l'exemple du restaurant, qu'il faut savoir faire à la main).

La loi binomiale en visuel : la planche de Galton :



Quel est l'événement qui se répète à l'identique de manière indépendante ?
Qu'est-ce qui est compté ?