1 Exercices d'application

Exercice 1

Le basketteur Lebron James a les taux de réussite suivants :

- 54,8% au tir à deux points,
- 34,3% au tir à trois points.

1. Lors d'un match, le temps restant ne laisse que quatre possessions du ballon à son équipe. Lebron James compte tirer quatre fois. Intuitivement, quel type de tir doit-il choisir pour maximiser ses chances de marquer au moins 6 points en quatre tirs du même type (à deux ou trois points) ?
2. On considère que Lebron James choisit de faire quatre tirs à deux points.
   (a) Justifier que chacun de ces tirs est une épreuve de Bernoulli. Préciser la probabilité d'un succès.
   (b) On suppose les quatre tirs indépendants. Représenter la situation par un arbre.
   (c) Déterminer la probabilité qu'il mette au moins trois paniers sur ces quatre tirs.
3. On considère que Lebron James choisit de faire quatre tirs à trois points.
   (a) Reprendre les questions 2. a) et b) pour cette nouvelle succession d'épreuves.
   (b) Déterminer la probabilité qu'il mette au moins deux paniers sur ses quatre tirs.
4. Reprendre la question 1. à l'aide des questions 2. et 3 .

Exercice 2

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de 1 obtenus lorsque l'on lance 8 fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.

1. Déterminer $p(X = 2)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de X, puis tracer le diagramme en barres associé.

Exercice 3

On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera n le nombre de répétitions et p, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

Exercice 4

Sylvain joue 3 fois de suite à un jeu vidéo sur son téléphone pour lequel sa probabilité de succès est 0,1.

1. Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces 3 parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?
2. Quelle est la probabilité qu'il perde ces 3 parties ?

Exercice 5

On tire 15 cartes avec remise dans un jeu de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de « trèfle » obtenus.

1. Justifier que T suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(T = 5)$.

Exercice 6

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(20; 0,36)$.

1. Calculer $p(X > 6)$.
2. Calculer $p(3 \leq X < 12)$.

Exercice 7

On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathcal{B}(30; 0,85)$.

1. Calculer $p(Y < 24)$.
2. Calculer $p(21 < Y < 25)$.

Exercice 8

D'après la SNCF, 91,4% des TGV arrivent à l'heure.

1. Elie prend un TGV. Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire consistant à regarder s'il est à l'heure ou non est une épreuve de Bernoulli.
2. Préciser la probabilité p d'un succès.

Exercice 9

Fiona joue à « pierre-feuille-ciseaux ». Expliquer pourquoi le choix de son adversaire (pierre, feuille ou ciseaux) à ce jeu n'est pas assimilable à une épreuve de Bernoulli.

Exercice 10

Lorsqu'il fait ses devoirs, Ismaël n'éteint jamais son téléphone. Quand il reçoit un message, il y a deux chances sur trois qu'il le regarde, indépendamment du fait qu'il ait regardé ou non les messages précédents. Pendant tout le temps qu'il a consacré à ses devoirs, il a reçu 3 messages.

1. Justifier que cette situation est assimilable à un schéma de Bernoulli en spécifiant à quel événement correspond un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité qu'il ait regardé au moins 2 messages.

Exercice 11

À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est $\dfrac{18}{37}$. On joue 20 fois successivement à la roulette en misant systématiquement sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. Quelle loi suit X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité de gagner 9 parties.

Exercice 12

On considère que la probabilité qu'un élève de S7 ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est $0,67$.

1. Dans une classe de S7 de 30 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année ? Justifier.
2. Calculer $p(M = 10)$, $p(M = 11)$ et $p(M = 12)$.
3. En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année scolaire.

Exercice 13

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,78$. Calculer avec la calculatrice :

1. $p(X < 75)$
2. $p(X > 79)$
3. $p(X \geq 74)$
4. $p(73 < X \leq 81)$

Exercice 14

La probabilité de gagner à un jeu de grattage est $0,1$. On considère 1 000 joueurs ayant joué à ce jeu dont on suppose que leurs résultats (« Gagné » ou « Perdu ») sont indépendants et on appelle G la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 1 000 joueurs. Déterminer la probabilité qu'il y ait :

1. plus de 100 gagnants.
2. moins de 85 gagnants.
3. entre 95 (inclus) et 105 (inclus) gagnants.
4. entre 90 (exclu) et 110 (exclu) gagnants.

Exercice 15

Dans une population, la proportion de végétariens est de 12%. On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise. Une cantine servant 250 repas à des personnes issues de cette population prévoit 32 repas végétariens. Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?

Exercice 16

1. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,83$. Calculer l'espérance de X.
2. Même question avec Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,79$.

Exercice 17 — La planche de Galton

Partie A — Avec 3 étages

Dans un jeu, on fait glisser un palet le long d'une planche cloutée comme ci-contre (le palet est en bleu et les clous en rouge) [1]. À chaque étage, le palet rencontre un clou et va à gauche ou à droite puis, après 3 étages, il arrive dans un des quatre réceptacles et indique le gain du joueur.

1. (a) Quel serait le gain du joueur si le palet allait à gauche puis à droite puis à gauche sur le dessin ? À droite puis à droite puis à gauche ?
   (b) Quel serait le gain du joueur si le palet allait une fois à gauche et deux fois à droite (indépendamment de l'étage) ?
2. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de fois où le palet va à gauche sur le dessin.
   (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et en donner les paramètres n et p.
   (b) Déterminer $p(X = 0)$, $p(X = 1)$, $p(X = 2)$ et $p(X = 3)$.
   (c) Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire G donnant le gain à ce jeu.

g_i	1 000	5	10	500
$P(G = g_i)$				

Partie B — Avec 11 étages

On considère le même dispositif appelé « planche de Galton » mais cette fois-ci avec 11 étages.

1. Sans justifier, combien de réceptacles y aura-t-il dans ce cas ?
2. (a) On considère que les réceptacles sont numérotés de 0 pour le plus à gauche à 11 pour le plus à droite. Quand on considère une bille, expliquer pourquoi la variable aléatoire R donnant le numéro du réceptacle dans lequel elle finit suit une loi binomiale puis donner les paramètres n et p de cette loi binomiale.
   (b) Tracer le diagramme en barres associé à cette loi binomiale c'est-à-dire le diagramme en barres pour lequel les barres sont centrées sur les valeurs entières k entre 0 et n et dont la hauteur des barres est donnée par $p(X = k)$.

1. Lors de la fête de l'école, il y avait un jeu en bois extrêmement similaire auquel on pouvait jouer dans le bâtiment Gutemberg.

2 Annales de tests B

Exercice 18 Calc. : ✗

	Un tireur a l'arc a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de rater sa cible à chaque fois qu'il la vise, de manière indépendante à ses autres tirs. Il tire quatre fois de suite sur sa cible.
	Pour les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible. Tout calcul intermédiaire sera valorisé.
3 points	1. Quelle est la probabilité de toucher la cible 4 fois ?
4 points	2. Quelle est la probabilité de toucher la cible au plus 1 fois ?
2 points	3. Quelle est la probabilité de toucher la cible 5 fois ?

Exercice 19 Calc. : ✓

	Un test de compétences est constitué de 30 questions à choix multiples. Pour chaque question, il y a 4 réponses possibles pour laquelle 1 seule est juste.
	Un élève répond au hasard à chaque question, de manière indépendante. On souhaite étudier X, la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses que peut obtenir cet élève au test en répondant de cette manière.
2 points	1. Justifier qu'à chaque question, l'élève a une probabilité de 25% de trouver la bonne réponse.
4 points	2. Justifier que X suit une loi binomiale. Quels sont ses paramètres ?
	Dans la suite, on donnera les probabilités arrondies à 4 décimales.
5 points	3. Faire une phrase expliquant ce que représente l'événement $X = 10$, puis calculer $P(X = 10)$.
	4. Pour réussir le test, l'élève doit avoir au moins 18 bonnes réponses.
4 points	Quelle est la probabilité que l'élève réussisse le test ?
4 points	5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre de bonnes réponses strictement supérieur à 10 et inférieur ou égal à 20 ?
	BONUS — Pour les autres élèves, le plus petit nombre de bonnes réponses est de 9, et le plus grand nombre de bonnes réponses est de 25. Quelle est la probabilité que l'un de ces deux nombres change avec le résultat de cet élève ?

Exercice 20 Calc. : ✓

	Sur une certaine île éloignée, 25% de la population ont le gène *Hs* qui est connu pour protéger contre le paludisme. Un échantillon aléatoire de 32 personnes subit une analyse de sang pour voir si elles ont ce gène.
2 points	1. Montrer que l'échantillon satisfait aux conditions d'un processus de Bernoulli.
	2. Déterminez la probabilité que le nombre de personnes de cet échantillon ayant le gène *Hs* soit :
1 point	(a) exactement 5
1 point	(b) plus petit que 10
2 points	(c) au moins 6 et au plus 12
2 points	(d) plus que la moyenne de la distribution.
2 points	3. Les conditions pour obtenir un processus de Bernoulli seront-elles toujours vraies pour la population de l'île ? Rédigez une ou deux phrases pour justifier votre réponse.

Exercice 21 Calc. : ✗

10 points	Indiquez pour chacune de ces situations s'il s'agit d'un distribution binomiale. Si oui, identifiez les valeurs de n et p : 1. Il a été prouvé qu'un certain vaccin provoque une réaction allergique chez deux personnes sur mille. 500 personnes ont été vaccinés et nous nous intéressons au nombre de réactions allergiques. 2. 35% d'une population de 2 000 individus ont des cheveux blonds. Nous choisissons dix personnes au hasard et nous nous intéressons au nombre de personnes blondes. 3. 3% des punaises fabriquées dans une certaine usine sortent défectueux. Les pnuaises sont conditionnées en boîtes de 20. Nous nous intéressons au nombre de punaises défectueuses dans une boîte choisie au hasard. 4. On lance cent fois un dé 6 et on se demande combien de « un » nous obtenons. 5. Nous tirons une carte d'un jeu et voyons si c'est un as ou non. Sans le remettre, on en extrait un autre et on voit aussi si c'est un as ou non... et ainsi de suite jusqu'à dix fois. On s'intéresse au nombre total d'as vus.

Exercice 22 Calc. : ✓

9 points	On sait que 30% de la population d'une certaine ville regarde un concours de télévision. Le concours appelle par téléphone 10 personnes de cette ville choisies au hasard. 1. Calculer la probabilité que, parmi ces 10 personnes, le nombre qui regardaient l'émission est : (a) Plus de 8. (b) Au moins une personne sur 10. 2. Calculer la moyenne et l'écart-type pour cette distribution binomiale.

Exercice 23 Calc. : ✗

6 points	On lance trois fois un dé tétraédrique à 4 faces numérotées 1 ;2 ;3 ;4. On appelle X le nombre de 1 obtenus. Déterminer la loi de probabilité de la variable X et calculer son espérance.

Exercice 24 Calc. : ✗

6 points	Dans une famille de 4 personnes (les deux parents et leur deux enfants), chacun possède un smartphone du même modèle et de la même marque. La probabilité que ce modèle tombe en panne au cours de l'année est de 20 %. Calculer la probabilité qu'exactement 2 des membres de cette famille voient leur smartphone tomber en panne au cours de l'année.

Exercice 25 Calc. : ✓

	Donner les réponses sous forme décimale arrondies à 4 chiffres après la virgule. Beaucoup d'écureuils vivent dans les arbres du bois de la Cambre autour de l'EEB1. Lorsqu'un écureuil entre sur le terrain de l'école, la probabilité qu'il se fasse repérer par un élève est égale à $\frac{1}{3}$. Un matin, 10 écureuils décident d'aller dans les arbres situés à l'intérieur du terrain de l'école. On note X le nombre d'écureuils qui se font repérer par un élève.
4 points	1. **Calculer** la probabilité que 7 écureuils exactement arrivent à aller dans les arbres de l'école sans se faire repérer par un élève.
4 points	2. **Calculer** la probabilité que moins de deux écureuils se fassent repérer par un élève.
4 points	3. **Calculer** $E(X)$. Comment peut-on **interpréter** ce résultat ?
3 points	4. **Calculer** l'écart type de X.

Exercice 26 Calc. : ✓

À « la ferme de Ker Loîc », on produit des œufs de différentes catégories. La probabilité qu'un œuf soit de la catégorie « Gros et Extra » est égale à 0,24. On remplit au hasard une boite de douze œufs. On suppose le choix des œufs indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la probabilité pour que la boite contienne exactement 5 œufs de la catégorie « Gros et Extra » ? Justifier le raisonnement.
2. Quelle est la probabilité pour que la boite contienne au moins un œuf de la catégorie « Gros et Extra » ?

Exercice 27 Calc. : ✓

12 points	Une entreprise agricole fournit des pommes ; 8% des pommes sont abîmées. Vous achetez un panier de 20 pommes choisies au hasard dans la production. On note X la variable comptant le nombre de pommes abîmées dans le panier. 1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres. 2. Calculez la probabilité qu'il y ait 10 pommes abîmées dans le panier. 3. Calculez la probabilité qu'il y ait au moins une pomme abîmée dans le panier. 4. Calulez la probabilité qu'il y ait entre 2 et 5 pommes abîmées dans le panier.

6 Déterminer directement $p(X = k)$ avec la calculatrice pour la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$

1. On souhaite calculer la probabilité $p(X = 3)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(11\,;\,0{,}4)$.
Suivre les consignes ci-dessous selon votre modèle de calculatrice.

TI-83 Premium CE

Étape 1

On accède au menu **distrib** en appuyant successivement sur les touches 2nde puis var (distrib).

Étape 2

On sélectionne **A:binomFdp(** dans le menu suivant.

```
DISTR DESSIN
9↑FFdp(
0:FFRép(
A:binomFdp(
B:binomFRép(
```

Étape 3

On obtient le menu suivant.

```
binomFdp
nbreEssais:11
p:0.4
valeur de x:3
Coller
```

dans lequel, on rentre dans l'ordre n (ici 11), p (ici 0.4) et k (ici 3) puis on valide en sélectionnant **Coller**.

Étape4

binomFdp(11,0.4,3) est affiché à l'écran, on le valide avec la touche entrer pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

CASIO GRAPH 90+E

Étape 1

Dans le menu de base **Exe-Mat**, on appuie sur la touche OPTN puis on sélectionne **STAT** avec **F5** puis **DIST** avec **F3** puis **BINOMIAL** avec **F5**.

Étape 2

On sélectionne alors **Bpd** ce qui engendre l'affichage de **BinomialPD(** à l'écran.

Étape 3

On complète cette ligne avec dans l'ordre k (ici 3), n (ici 11) et p (ici 0.4) séparés par des virgules (obtenues avec la touche ,) puis on ferme la parenthèse de sorte que l'on obtienne **BinomialPD(3,11,0.4)** puis on valide avec la touche EXE pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

NUMWORKS

Étape 1

On appuie sur ⌂ et on choisit **Probabilités**.

Étape 2

On sélectionne ensuite **Binomiale** :

```
Choisir le type de loi
Binomiale
```

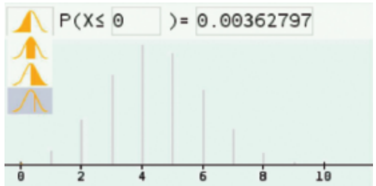
Étape 3

On règle les valeurs de n (ici 11) et p (ici 0.4) puis on valide **Suivant** :

```
n        11
p        0.4
Suivant
```

Étape 4

Avec les flèches, on se déplace sur la courbe à gauche et on fait apparaître le menu déroulant avec EXE :



puis on sélectionne le dernier pictogramme et on valide.

Étape 5

On saisit k (ici 3) après le = de sorte d'obtenir :

```
P(X= 3 )= 0.1773674
```

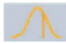
2. Calculer les probabilités $p(Y = 10)$ et $p(Z = 17)$ pour Y suivant la loi $\mathcal{B}(53\,;\,0{,}2)$ et Z suivant la loi $\mathcal{B}(40\,;\,0{,}32)$.

↪ Cours 5 p. 174

7 Déterminer directement $p(X \leqslant k)$ avec la calculatrice pour la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$

TICE 5 min

1. On souhaite calculer la probabilité $p(X \leqslant 5)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(11\,;\,0{,}4)$.
Suivre les consignes ci-dessous selon le modèle de calculatrice.

TI-83 Premium CE 	CASIO GRAPH 90 +E 	NUMWORKS 
Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 2**, où l'on choisit **B:binomFRép** plutôt que **A:binomFdp.** On obtient donc **binomFRép(11,0.4,5)** à l'**étape 4** qui donne environ 0,753.	Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 2**, où l'on choisit **Bcd** plutôt que **Bpd**. On obtient donc **BinomialCD(5,11,0.4)** à l'**étape 3** qui donne environ 0,753.	Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 4** où l'on choisit  plutôt que . On obtient donc  P(X≤ 5)= 0.7534981

2. Calculer les probabilités $p(Y \leqslant 22)$ et $p(Z \leqslant 56)$ pour Y suivant la loi $\mathscr{B}(30\,;\,0{,}85)$ et Z suivant la loi $\mathscr{B}(100\,;\,0{,}5)$.

Remarque La calculatrice **NUMWORKS**, permet de calculer des probabilités d'autres types que $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (par exemple $p(a \leqslant X \leqslant b)$).

Pour les calculatrices **TI** et **CASIO**, se reporter à Méthode 5 p.175 pour voir comment faire dans les autres cas.

Cours 5 p. 174

Méthode 5 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Énoncé

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}23$, calculer :

a) $p(X < 12)$ **b)** $p(X \geqslant 4)$ **c)** $p(5 < X \leqslant 8)$

Remarque Les calculatrices de lycée permettent de calculer des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (ainsi que $p(X \geqslant k)$ et $p(k \leqslant X \leqslant k')$ pour la **NUMWORKS**) mais il faut pouvoir calculer tous types de probabilités avec la loi binomiale.

Solution

a) $p(X < 12) = p(X \leqslant 11) \approx 0{,}512$. **1**

b) $p(X \geqslant 4) = p(\overline{X \leqslant 3}) = 1 - p(X \leqslant 3) \approx 0{,}999$. **2**

c) $p(5 < X \leqslant 8) = p(6 \leqslant X \leqslant 8) = p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5) \approx 0{,}14$. **3**

On peut aussi remarquer que
$p(5 < X \leqslant 8) = p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) \approx 0{,}14$.

Conseils & Méthodes

1 X prend des valeurs entières : les événements $X < 12$ et $X \leqslant 11$ sont donc identiques.

2 $X \geqslant 4$ est l'événement contraire de $X \leqslant 3$.

3 On a $\underbrace{0\,;\ldots;\,4\,;\,5}_{X \leqslant 5}\,;\,\underbrace{6\,;\,7\,;\,8}_{5 < X \leqslant 8}\,;\,9\,;\ldots;\,50$
donc $p(5 < X \leqslant 8)$ est égal à $p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5)$.