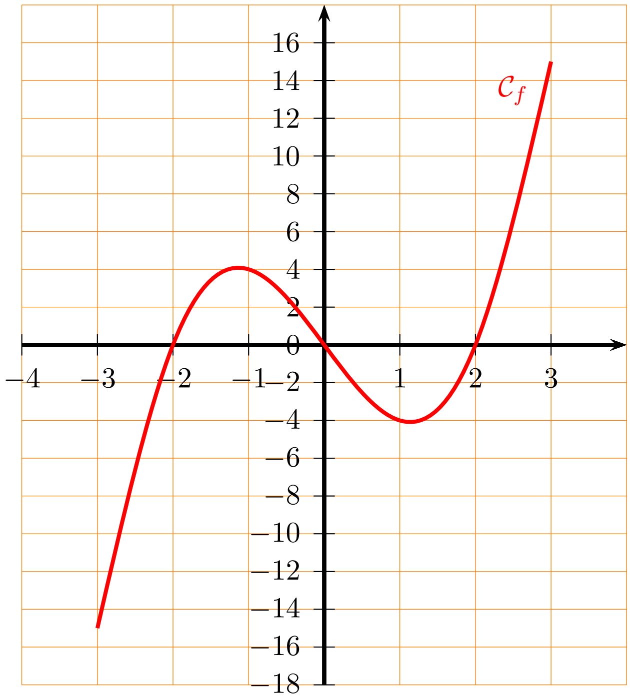
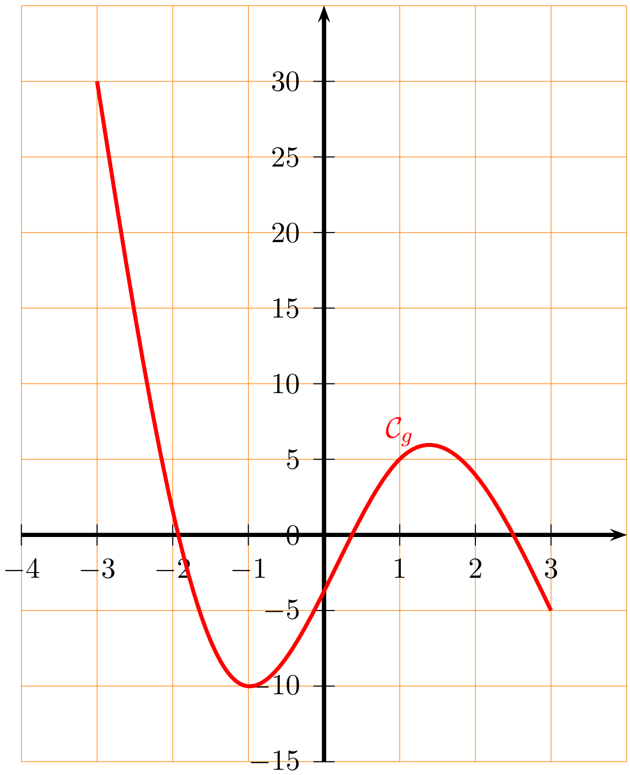
Exercice 1

Voici les graphiques de deux fonctions. Pour chacune d'elles, réponsez aux questions suivantes :

1. Quel est le domaine de la fonction ?
2. Quel est l'ensemble image de la fonction ?
3. Quelles sont les racines de la fonction ?
4. Sur quel ensemble la fonction est-elle positive ?
5. Quels sont les extremums (minimum, maximum) de la fonction ? En quelles valeurs sont-ils atteints ?





Fonction f.

1. Le domaine $\mathcal{D}_f$ est $[-3; 3]$.
2. L'image de $\mathcal{D}_f$ par la fonction est $[-15; 15]$.
3. Les racines de f sont $\{-2; 0; 2\}$.
4. La fonction f est positive sur $[-2; 0] \cup [2; 3]$.
5. Le minimum de f est -15. Il est atteint pour $x = -3$ (ce qui veut dire que $f(-3) = -15$).
   Le maximum de f est 15. Il est atteint pour $x = 3$ (ce qui veut dire que $f(3) = 15$).

Fonction g.

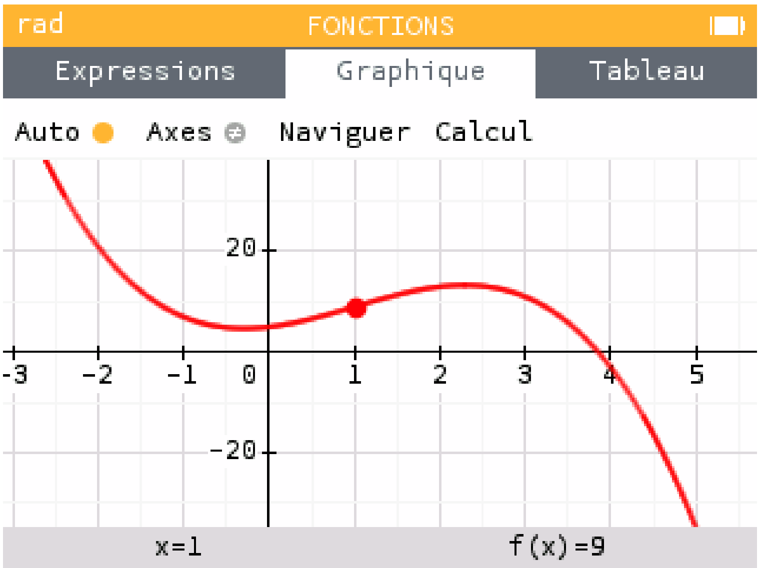
1. Le domaine $\mathcal{D}_g$ est $[-3; 3]$.
2. L'image de $\mathcal{D}_g$ par la fonction est $[-10; 30]$.
3. Les racines de g sont $\{-1; 0; 2\}$.
4. La fonction g est positive sur $[-3; -1] \cup [0; 2]$.
5. Le minimum de g est -10. Il est atteint pour $x = 3$ (ce qui veut dire que $g(3) = -10$).
   Le maximum de g est 30. Il est atteint pour $x = -3$ (ce qui veut dire que $g(-3) = 30$).

Exercice 2

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 5$.

À l'aide du graphique de la fonction dans la calculatrice, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on notera a. Donner un encadrement de a à 0,01 près, à 0,0001 près.

Le graphique de la calculatrice est donné ici :



On voit sur le graphique que la courbe semble ne couper qu'une seule fois l'axe des abscisses (on peut dézoomer pour se convaincre que c'est bien le cas même plus loin), donc l'équation $f(x) = 0$ semble n'admettre qu'une seule solution. La solution a l'air d'être pas loin de $3,8$. Pour avoir une valeur plus précise, on peut soit :

- depuis le graphique, demander à la calculatrice un antécédent de 0 (sur la TI83, il s'agit de demander les racines de la fonction, ou alors on peut aussi tracer la fonction d'équation $y = 0$ et demander l'intersection des deux) ; la calculatrice répond $x \approx 3,855197$ d'où les valeurs approchées $\boxed{3,85}$ à $0,01$ près et $\boxed{3,8552}$ à $0,0001$ près.
- demander à la calculatrice un tableau de valeurs. On demande alors d'abord un tableau de valeurs avec un pas de $0,01$, entre $3,8$ et 4, et on voit que $f(3,85) \approx 0,100875$ et $f(3,86) \approx -0,093656$ donc α est entre $3,85$ et $3,86$. Puis on règle l'intervalle par pas de $0,0001$ entre ces deux valeurs, et on voit que $f(3,8551) \approx 0,001878232$ et $f(3,8552) \approx -6,733261 \cdot 10^{-5}$ donc α est entre $3,8551$ et $3,8552$.

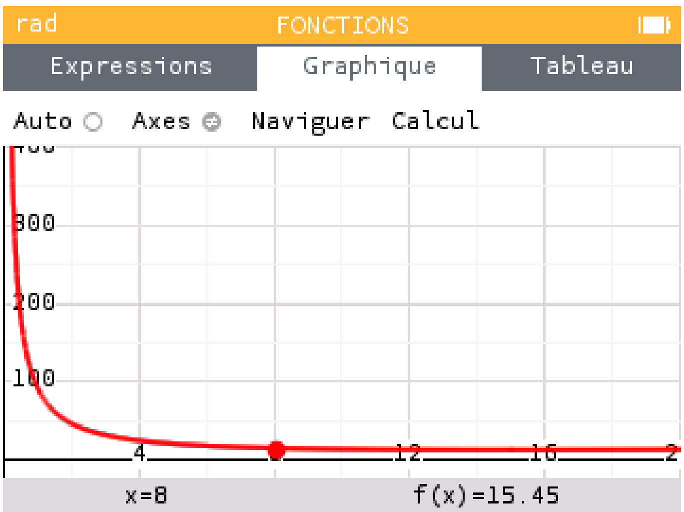
Exercice 3

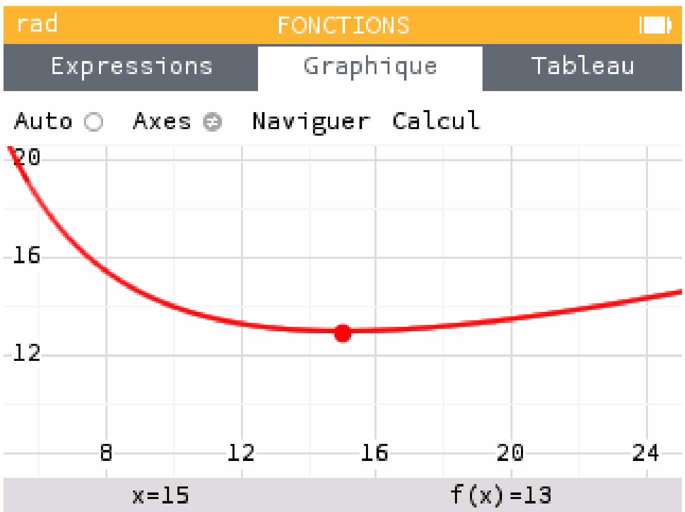
Le bureau d'étude d'une entreprise a estimé que le coût moyen d'un article en euros pour la fabrication de x articles est :

$$c(x) = 0,4x + 1 + \frac{90}{x} \qquad \text{pour } 0 < x < 20$$

À l'aide de la calculatrice, déterminer graphiquement le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen unitaire soit minimal, et préciser ce coût moyen minimal.

Ici, il faut demander à la calculatrice de tracer la fonction pour x entre 0 et 20. Sur le graphique de gauche, on a laissé la vue automatique, et malheureusement sur cette vue on ne voit pas bien le minimum, car la courbe est très plate vers la droite. On va donc zoomer, par exemple en réglant les valeurs de y entre 0 et 15 car en navigant avec le curseur on voit que les valeurs de la fonction sont proches de cette valeur. On obtient alors le graphique à droite. Le minimum a l'air d'être aux alentours de $14 - -15$ quand on fait bouger le curseur. On se place alors précisément en 14 et en 15 et on voit que le minimum est pour $x = 15$. On calcule alors $c(15) = 13$, ce qui nous dit donc qu'il faut fabriquer $\boxed{15}$ articles et que cela donne un coût unitaire minimal de $\boxed{13€}$.





Exercice 4

Une expérience de laboratoire a consisté à relever, pendant 30 minutes, la température d'un matériau subissant un réchauffement puis un refroidissement. Les résultats ont permis de modéliser la température (en °C) du matériau en fonction du temps t (en min) par la fonction f :

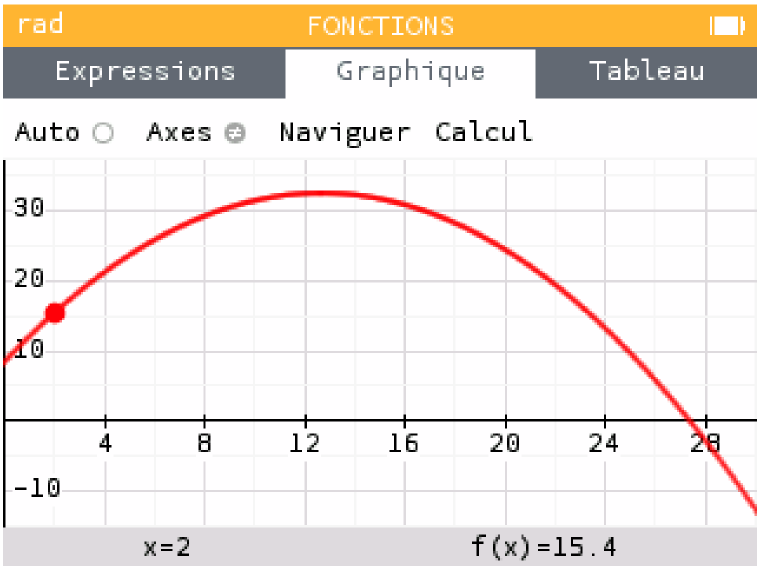
$$f(t) = -0,15t^2 + 3,8t + 8,4$$

Déterminer graphiquement à quels instants (à 1 seconde près) la température du matériau est :

1. Égale à 20°C.
2. Nulle.
3. Maximale.

Ici, il faut faire attention à trois choses :

- tout d'abord, la variable à utiliser à chaque fois sur la calculatrice est x, et pas autre chose. Il faut donc remplacer t par x
- ensuite, le séparateur décimal sur la calculatrice est le point, et pas la virgule. Il faut donc taper $-0.15x^2 + 3.8x + 8.4$
- enfin, l'énoncé précise bien que c'est pendant 30 minutes, donc il faut regarder pour $x \in [0; 30]$. Au final, on obtient le graphique ci-dessous :



1. On demande les antécédents de 20 (ou bien on trace $y = 20$ et on regarde les intersections), on trouve deux valeurs : $3,550137$ et $21,7832$. Ces valeurs sont en minutes, et on demande à la seconde près. $3,550137$ min, c'est 3 min + $0,550137$ min, et $0,550137$ min c'est 33 s (on multiplie par 60). De même $0,7832$ min c'est 47 s. Du coup, les valeurs cherchées sont $\boxed{\text{3 min 33 s ; 21 min 47 s}}$.
2. On demande les racines de la fonction (ou bien les antécédents de 0), on trouve une valeur : $27,37872$. Comme auparavant cela donne $\boxed{\text{27 min 23 s}}$.
3. On demande graphiquement le maximum, la calculatrice dit que c'est atteint pour $x = 12,66667$ (et que ce maximum vaut $32,46667$). Du coup, comme auparavant, cela donne $\boxed{\text{12 min 40 s}}$.

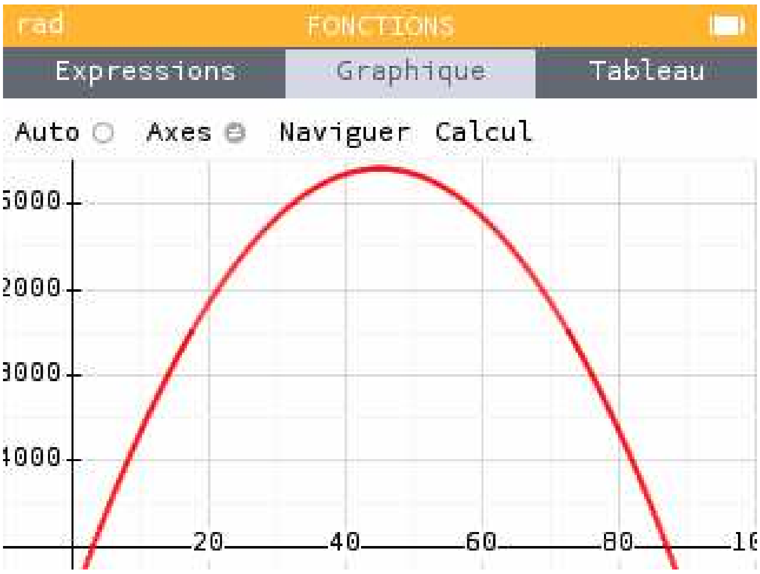
Exercice 5

Une usine fabrique et vend des boîtes de jeu pour enfants. Après la fabrication et la vente de x centaines de boîtes de jeu, le bénéfice net réalisé en un mois s'exprime, en euros, par

$$B(x) = -10x^2 + 900x - 2610 \qquad \text{pour } x > 0$$

1. Visualiser la courbe représentative de B dans un repère bien choisi du plan. Esquisser l'allure de la courbe sur votre feuille (XMIN = -10 ; XMAX = 100 ; graduation :10 ; YMIN=-1000 ; YMAX = 18000 ; graduation : 1000)
2. Dresser le tableau de variations de B.
3. Pour quel nombre de boîtes de jeu fabriquées et vendues le bénéfice réalisé par cette usine est-il maximal ?
4. Préciser la valeur, en euros, du bénéfice mensuel maximal.
5. Déterminer le nombre de boîtes de jeu fabriquées et vendues pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.

1. Ici on demande à la calculatrice de visualiser la courbe avec les valeurs demandées, cela donne la courbe suivante :



   Pour le dessin, on peut prendre comme unités graphiques :

   - sur l'axe des x, 1 cm pour 10 (puisque les x vont entre -10 et 100, cela donnera 11 cm)
   - sur l'axe des y, 1 cm pour 2000 (puisque les y vont entre -1000 et 18000, cela donnera 10 cm)

2. Graphiquement on voit que B est croissante puis décroissante. On peut se souvenir que pour une fonction du second degré de type $ax^2 + bx + c$, le sommet est atteint en $x = -\dfrac{b}{2a}$, c'était au programme de S5MA4 et cela peut éventuellement servir. Ici $B(x) = -10x^2 + 900x - 2610$ donc on a $a = -10$, $b = 900$ et $c = -2610$ d'où le sommet en $x = 45$, et du coup en $y = B(45) = 17\ 640$.
   Sinon, on demande à la calculatrice de trouver le maximum, on trouve la même chose.
   Donc B est $\boxed{\text{croissante pour } x \in]0; 45]}$ puis B est $\boxed{\text{décroissante pour } x \in [45; +\infty[}$ (l'énoncé précise que B est définie pour $x > 0$).
3. L'énoncé nous dit que x représente le nombre de boîtes de jeu en centaines. Du coup le bénéfice est maximal pour $\boxed{\text{4 500 boîtes fabriquées et vendues}}$.
4. L'énoncé nous dit que $B(x)$ représente le bénéfice en euros. Du coup le bénéfice mensuel maximal est de $\boxed{17\ 640€}$.
5. En demandant à la calculatrice les zéros de la fonction, on trouve $x = 3$ et $x = 87$, donc l'entreprise est bénéficiaire (c'est-à-dire, $B(x) \geq 0$) pour $\boxed{x \in [3; 87]}$ c'est-à-dire pour un nombre de boîtes $\boxed{\text{entre 300 et 8 700}}$.