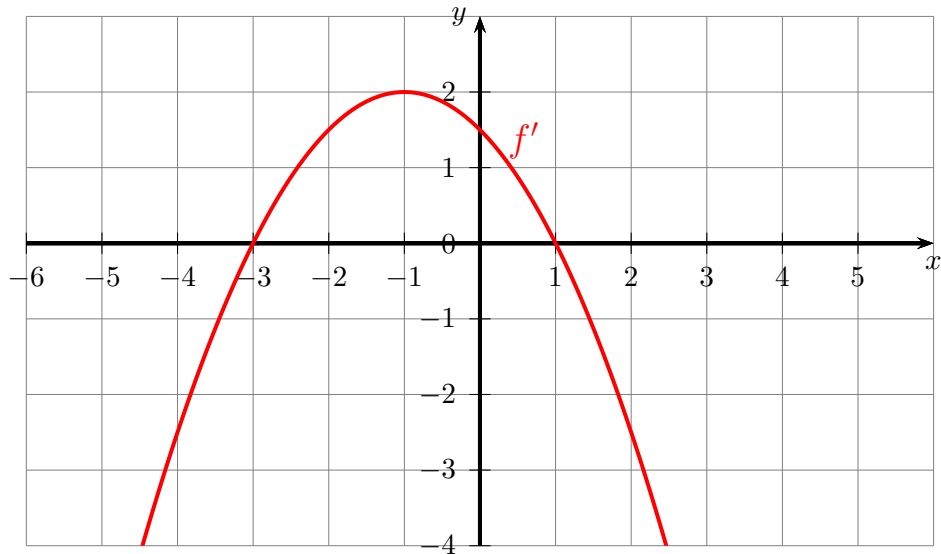


Exercice 2

Calc. : ✖

Le diagramme ci-dessous montre le graphique de la dérivée f' d'une fonction f .



1. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est décroissante ou croissante.
2. Déterminez si la fonction f comporte des extremums. Dans l'affirmative, déterminez leur nature. Justifiez vos réponses.

1. On lit graphiquement le signe de f' pour en déduire les variations de f . Là où la courbe de f' est en-dessous de l'axe des abscisses, $f' < 0$ (signe « $-$ ») donc f est décroissante, là où la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses, $f' > 0$ (signe « $+$ ») donc f est croissante.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
Sgn. $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Var $f(x)$					

- Ainsi, le tableau de variations nous permet de lire que :
- f est décroissante sur $] - \infty; -3]$ et sur $[1; +\infty[$;
 - f est croissante sur $[-3; 1]$.
2. Ainsi f a deux extremums : un **minimum** (local) à l'abscisse **-3** (f est décroissante juste avant puis croissante) et un **maximum** (local) à l'abscisse **1** (f est croissante juste avant puis décroissante).

Exercice 1

Calc. : ✓

Dans une usine de sucreries, la production journalière de chocolat est comprise entre 0 et 90 kilogrammes. Pour tout réel x dans $[0 ; 90]$, on note $c(x)$ le coût de production, en euros, de x kilogrammes de chocolat. La fonction c est définie sur l'intervalle $[0 ; 90]$, et son expression est :

$$c(x) = 0,05x^2 + 1,2x + 60$$

Un kilogramme de chocolat produit est vendu 6€. La fonction r , exprimant la recette en euros pour x kilogrammes vendus, est donc définie sur l'intervalle $[0 ; 90]$ par $r(x) = 6x$.

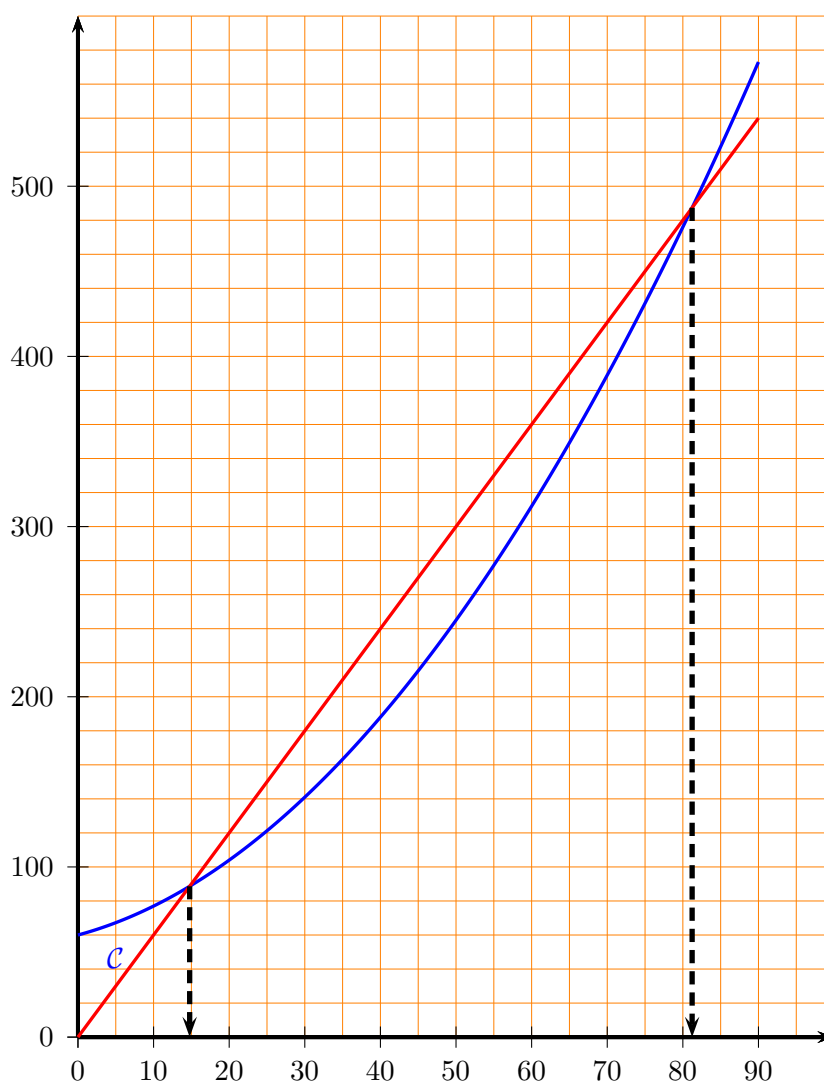
1. Le bénéfice d'une entreprise correspond à ce qu'elle gagne moins ce qu'elle dépense. Montrer que le bénéfice $b(x)$ réalisé par l'usine pour la production et la vente journalières de x kilogrammes de chocolat, pour x dans l'intervalle $[0 ; 90]$, est donné par :

$$b(x) = -0,05x^2 + 4,8x - 60$$

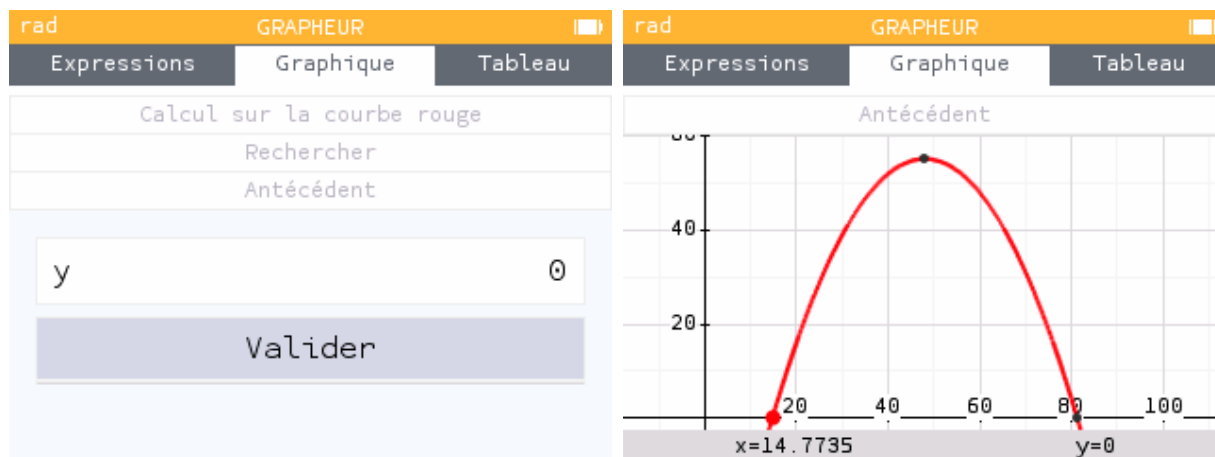
2. Résoudre à la calculatrice l'inéquation $b(x) \geq 0$.
3. Pour quelles quantités de production l'entreprise perd-elle de l'argent ?

La courbe $\mathcal{C}$, représentative dans un repère orthogonal de la fonction coût de production c , est donnée sur le graphique suivant.

4. Tracer la fonction r sur le même graphique.
5. Vérifier graphiquement la réponse à la question 2) en expliquant.



1. Le bénéfice $b(x)$ se calcule donc par $b(x) = r(x) - c(x) = 6x - (0,05x^2 + 1,2x + 60) = 6x - 0,05x^2 - 1,2x - 60 = -0,05x^2 + 4,8x - 60$.
2. On rentre la fonction B dans la calculatrice, puis dans l'outil graphique, on demande les antécédents de 0 (depuis le graphique cliquer sur Calcul, puis Rechercher, Antécédent, et rentrer $y = 0$) pour savoir où la fonction vaut 0 :



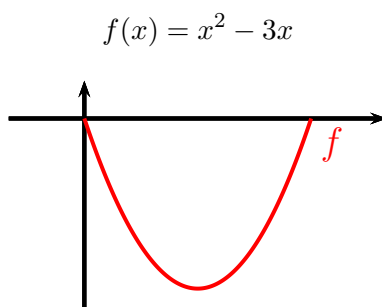
La calculatrice affiche 14.7735 et 81.2265 (naviguer avec les flèches pour voir les deux valeurs), et on voit clairement que la fonction est plus grande que 0 entre ces deux valeurs, il s'agit donc de $\mathcal{S} = [14, 77; 81, 23]$.

3. L'entreprise perd de l'argent quand son bénéfice est négatif, c'est donc le contraire de la question précédente : lorsque la production, en kg, est dans $[0; 14, 77[\cup]81, 23; 90]$.
4. La fonction r est une fonction linéaire, sa représentation est donc une droite, il suffit de calculer deux points. Par exemple $r(0) = 6 \times 0 = 0$ (ce qui donne le point $(0; 0)$ sur le graphique) et $r(10) = 6 \times 10 = 60$ (ce qui donne le point $(10; 60)$ sur le graphique).
5. Résoudre graphiquement $b(x) \geq 0$, c'est regarder où les recettes sont plus grandes que les coûts. Il faut donc regarder où la courbe des recettes (en rouge) est au-dessus de la courbe des coûts (en bleu). Les traits de construction permettent bien de retrouver $\mathcal{S} = [14, 77; 81, 23]$.

Exercice 3

Calc. : ✖

Jim creuse un trou dans le jardin pour construire une piscine. Aujourd'hui il pleut, il est donc assis à l'intérieur de ce trou et se demande quelle est la profondeur de celui-ci. Il veut que le trou fasse au moins 2 mètres de profondeur. Il sait que la profondeur du trou peut être modélisée par la fonction suivante :



Déterminez si le trou est suffisamment profond. Justifiez votre réponse en calculant la profondeur du trou que Jim a déjà creusé.

Pour cet exercice, on cherche la valeur minimale de la fonction f (on veut savoir si le trou a une profondeur d'au moins 2 mètres, on veut donc s'assurer que le minimum de f est inférieur ou égal à -2 (la profondeur donne une valeur négative pour la fonction f)). Pour ce faire, on a (au moins) deux manières d'opérer :

- la première manière est la manière qui fonctionnera quelle que soit la fonction qu'on vous donne : on cherche le minimum de la fonction, donc il suffit d'étudier ses variations. Pour cela, il suffit de dériver et d'étudier le signe de la dérivée. Comme à l'exercice 2.

On calcule la dérivée :

$$f(x) = x^2 - \textcircled{3} \times x.$$

$$f'(x) = 2x - \textcircled{3} \times 1.$$

$f'(x) = 2x - 3$

f' est une fonction du 1er degré. Pour trouver là où f' est positive, on peut résoudre à la main $f'(x) \geq 0$:

$$2x - 3 \geq 0$$

$$2x \geq 3x \quad \left. \begin{array}{l} \text{On ajoute 3 de chaque côté} \\ \text{On divise par 2 de chaque côté} \end{array} \right\}$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

On trouve donc que f' est positive là où x est plus grand que $\frac{3}{2}$, et f' est négative de l'autre côté, ce qui donne le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Sgn. $f'(x)$	-	0	+
Var $f(x)$			

- Une méthode spécifique à la fonction qui nous est présentée est de se rendre compte qu'ici il s'agit d'une fonction du second degré, donc la représentation graphique est une parabole. On sait que la parabole est symétrique, donc en particulier le sommet est au milieu des deux racines. Or ici c'est facile de trouver les racines de f : effectivement $f(x) = 0$ donne $x^2 - 3x = 0$ ce qui se factorise en $x(x - 3) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = 3$. Les racines étant 0 et 3, le sommet est au milieu, donc en $\frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$.

Dans les deux cas on a trouvé que f a un minimum en $x = \frac{3}{2}$. On calcule $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{9}{4} = -2,25$. Or $-2,25 \leq -2$ donc le trou est assez profond.