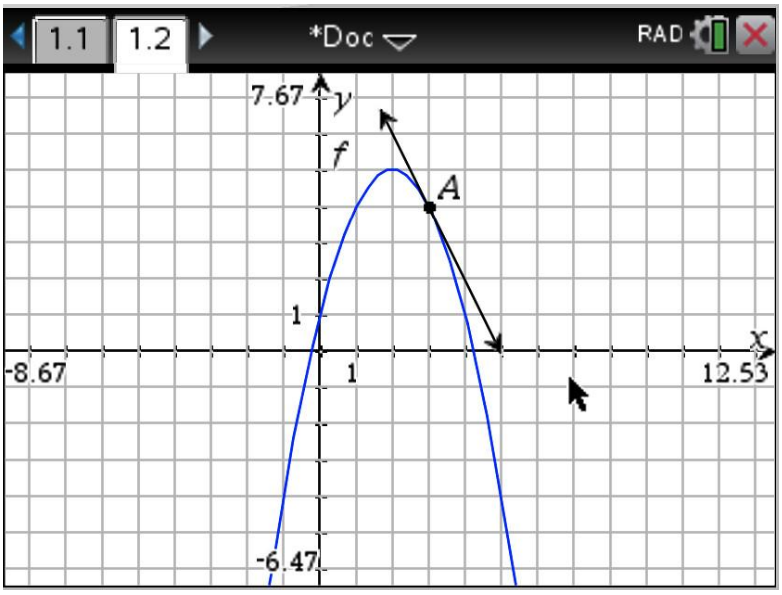
1 Dérivées

Exercice 1 Calc. : ✗

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x - 12$.

1. $f'(x) = 4x + 8$.
   (a) La formule pour l'équation de la tangente est $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici, on trouve $y = 12(x - 1) - 2$ c'est-à-dire $y = 12x - 14$.
   (b) La tangente est horizontale quand $f'(x) = 0$ c'est-à-dire quand $4x + 8 = 0$ c'est-à-dire $x = -2$. On calcule $f(-2) = -20$ ce qui correspond donc au point $(-2; -20)$.

Exercice 2 Calc. : ✗



Le graphique montre la courbe d'une fonction f.

1. On lit $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ et $f(3) = 4$.
2. La tangente en $x = 3$ est tracée donc on lit sa pente $f'(3) = -2$. En $x = 2$, la tangente est horizontale donc $f'(2) = 0$.
3. La tangente passe par le point A$(3; 4)$ et a une pente de -2 donc en revenant en arrière elle passe en $(2; 6)$ puis $(1; 8)$ puis $(0; 10)$ donc son ordonnée à l'origine est 10. Donc son équation est $y = -2x + 10$. On pouvait aussi utiliser l'équation de la tangente comme à l'exercice 1.
4. $f'(x) < 0$ quand f est décroissante, c'est-à-dire sur $]2; +\infty[$.

Exercice 3 Calc. : ✗

1. $f(x) = x^2 + x + 5$ donne $f'(x) = 2x + 1$
2. $g(x) = 3x^2 + 2x + \frac{2}{3}$ donne $g'(x) = 6x + 2$
3. $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$ donne $h'(x) = \frac{1}{2}x + 1$
4. $i(x) = 3x^4 + \frac{1}{4}x$ donne $i'(x) = 12x^3 + \frac{1}{4}$
5. $j(x) = \frac{x^3}{x^2}$ n'est pas directement dérivable car ce n'est ni une fonction de référence ni une somme de fonctions de référence, on commence par simplifier $j(x) = x$ ce qu'on sait dériver, on trouve $j'(x) = 1$

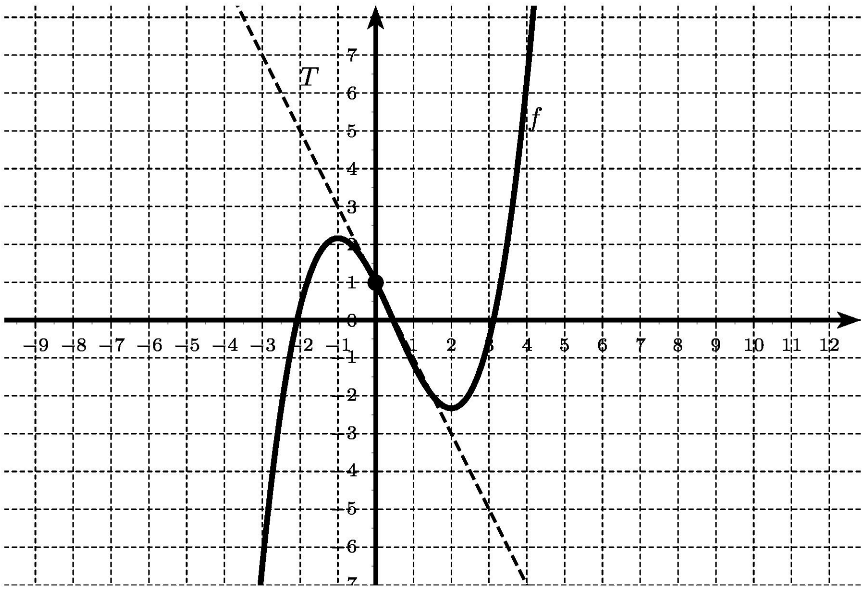
Exercice 4 Calc. : ✓

On considère la fonction f qui a pour expression $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{4}$.

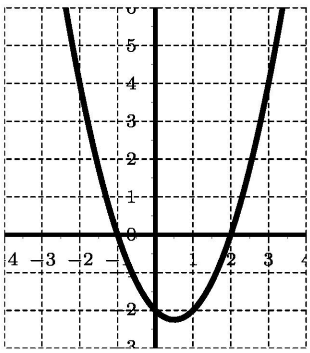
1. À la calculatrice on peut voir que c'est une parabole orientée vers le haut qui a donc un minimum. On peut demander la valeur de ce minimum directement, et on trouve $x = -0,5$ ainsi que $f(-0,5) = 0,5$ donc le point extremum est en $(-0,5; 0,5)$. Sinon, on pouvait dériver $f'(x) = 2x + 1$ puis résoudre $f'(x) = 0$ ce qui donnait également $x = -0,5$.
2. La tangente est horizontale et son équation est $y = 0,5$ (elle passe par le point extremum qui a pour ordonnée $0,5$).
3. Cette fois on peut encore utiliser la formule comme dans l'exercice 1, on trouve $f'(2) = 5$ et $f(2) = 6,75$ donc l'équation est $y = 5(x-2) + 6,75$ soit $y = 5x - 3,25$.
4. On va donc maintenant résoudre $2x + \frac{3}{4} = 5x - 3,25$ ce qui donne $4 = 3x$ ou $x = \frac{4}{3}$, d'où $y = 2 \times \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{41}{12}$, donc le point d'intersection a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}; \frac{41}{12}\right)$.

Exercice 5 Calc. : ✓

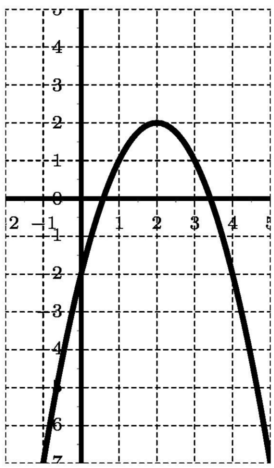
Soit la fonction f dont le graphe et une tangente (T) sont donnés ci-dessous :



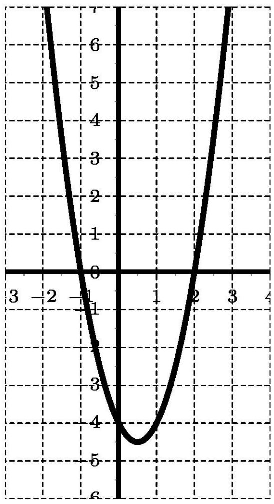
Déterminez lequel des graphes ci-dessous est celui de la dérivée f' de la fonction f. Justifiez correctement.



Graphe A



Graphe B



Graphe C

La fonction f est croissante jusqu'en $x = -1$ puis décroissante jusqu'en $x = 2$ puis croissante donc la dérivée doit être positive puis négative puis positive, donc c'est forcément le graphe A ou C. On lit que la pente de la tangente en 0 est -2 donc c'est le graphe A.

2 Fonctions périodiques

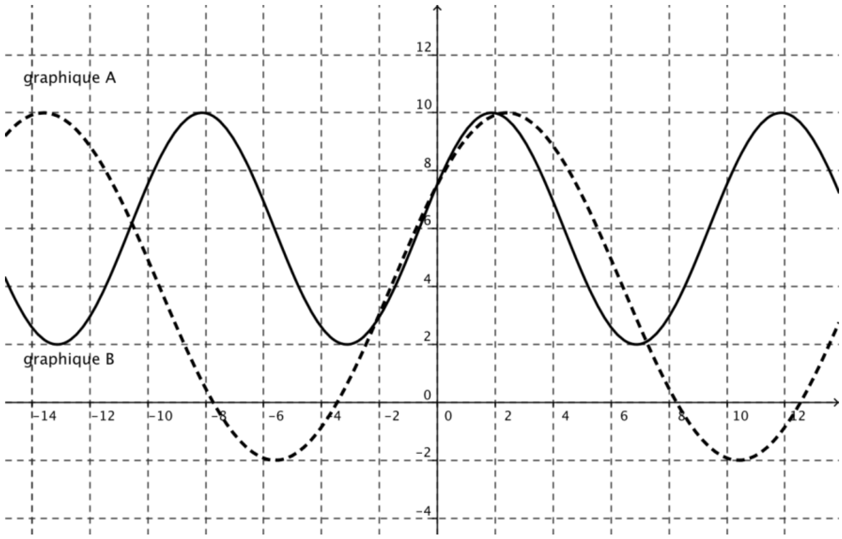
Exercice 6 Calc. : ✓

La profondeur de l'eau au bout d'une jetée peut être modélisée par la fonction $d(t) = 5,6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 14,9$, où d est la profondeur de l'eau en mètres et t est le nombre d'heures après minuit.

1. La période est donnée par $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$.
2. On calcule $d(0) = 14,9$ donc la profondeur de l'eau à minuit est de 14,9 m.
3. On calcule $d(8) \approx 10,1$ donc la profondeur de l'eau à 8h du matin est d'environ 10,1 m.
4. On cherche graphiquement le maximum, la calculatrice nous dit que c'est une profondeur de $20,5$ pour $x = 15$ (la première fois après 12) ce qui correspond donc à 15h.

Exercice 7 Calc. : ✗

Associer graphique et fonction : $f(x) = 6 + 4\sin\left(\frac{\pi}{5}x + \frac{\pi}{8}\right)$ $\quad g(x) = 4 + 6\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{\pi}{5}\right)$



f correspond au graphique A (on peut le voir avec la valeur moyenne de 6) et g au graphique B (on peut le voir avec la moyenne de 4).

Exercice 8 Calc. : ✓

Préciser le décalage vertical, l'amplitude, la phase à l'origine, la période, la fréquence pour la fonction suivante : $f(x) = 6 + 4\sin\left(\frac{\pi}{5}x + \frac{\pi}{8}\right)$.

Le décalage vertical (ou valeur moyenne) est de 6, l'amplitude de 4, la période de $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$ (ce qui donne une fréquence de $\frac{1}{10}$) et la phase à l'origine se calcule en trouvant la valeur de c, à l'intérieur du sinus. On doit donc trouver $\frac{\pi}{5}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{5}(x - c)$ ce qui donne $\frac{\pi}{5}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{5}x - \frac{\pi}{5}c$ soit $\frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{5}c$ et finalement $-\frac{5}{8} = c$.

3 Probabilités

Exercice 9 Calc. : ✗

1. Si 30 coueurs participent à une course et qu'on cherche le nombre de podiums, alors il n'y a pas répétition mais l'ordre est important. Il faut calculer $\frac{30!}{27!} = 24\,360$.
2. Pour choisir trois coureurs dans une équipe de cinq, il y a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ possibilités.

Exercice 10 Calc. : ✓

L'entraîneur d'une équipe de football a sélectionné 24 joueurs pour un tournoi. Il a choisi 8 défenseurs, 7 milieux de terrain, 5 attaquants et 4 gardiens de but.

1. Ici il s'agit du principe multiplicatif : il y a $\binom{4}{1}$ choix pour le gardien, $\binom{8}{4}$ choix pour les défenseurs, $\binom{7}{3}$ choix pour les milieux de terrain et $\binom{5}{3}$ choix pour les attaquants donc au final $\binom{4}{1}\times\binom{8}{4}\times\binom{7}{3}\times\binom{5}{3} = 98\ 000$ choix d'équipes.
2. On a 4 défenseurs à répartir sur 4 points bleus. Il y a donc $4! = 24$ possibilités.
3. On a en tout $\binom{24}{4} = 10\ 626$ groupes possibles, et le nombre de groupes comportant 1 défenseur, 1 milieu de terrain, 1 attaquant et 1 gardien de but est de $\binom{5}{3}$ choix pour les attaquants donc au final $\binom{4}{1}\times\binom{8}{1}\times\binom{7}{1}\times\binom{5}{1} = 1\ 120$, donc la probabilité est de $\dfrac{1\ 120}{10\ 626} = \dfrac{80}{759}$.
4. La probabilité que Christiano marque un penalty est de 85%, indépendamment de ses autres tirs. Christiano tire 5 penaltys. On va noter X le nombre de tirs réussis. X suit une loi binomiale car il y a répétition (5 fois) à l'identique (toujours la même probabilité) de manière indépendante (c'est écrit) de la même épreuve de Bernoulli (succès : marquer).
   (a) On demande $P(X = 5) = 0,85^5 \approx 0,44$.
   (b) On demande $P(X = 3)$. On demande à la calculatrice *binompdf* (la fonction de probabilité, en anglais probability distribution function) avec pour paramètres $k = 3$, $n = 5$, $p = 0.85$, elle répond $\approx 0,14$.
   (c) On demande $P(X \leq 4)$. On demande à la calculatrice *binomcdf* (la fonction de répartition, en anglais cumulative distribution function) avec pour paramètres $k = 4$, $n = 5$, $p = 0.85$, elle répond $\approx 0,56$ (ce qu'on pouvait retrouver comme $P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5)$ avec le résultat de la question a).

Exercice 11 Calc. : ✓

Lors d'un concert, il y a 135 places. Les organisateurs du concert savent par expérience que seulement 96% des personnes ayant acheté un billet viendront au concert. Ils décident donc de vendre plus de billets qu'il n'y a de places.

1. Si on compte X le nombre de personnes présentes au concert, il y a clairement répétition (autant de fois que de billets vendus) à l'identique (probabilité de 96% pour chaque personne) de la même expérience (succès : venir au concert). Maintenant seul l'indépendance peut être mise en question : effectivement si un couple a payé 2 places de concert, il est fort probable que l'absence de l'un implique l'absence de l'autre. Donc l'indépendance n'est pas absolument certaine pour toutes les personnes, mais quasiment (les amis ou familles qui vont ensemble à ce concert sont quasiment le seul cas où les probabilités d'absences ne sont pas indépendantes).
2. Il y a surréservation quand 136 ou 137 personnes viennent au concert. On doit calculer $P(X \geq 136)$ pour X qui suit $\mathscr{B}(137, 0.96)$. Cela peut se calculer comme $1 - P(X \leq 135)$, et cette probabilité se calcule avec *binomcdf* (la fonction de répartition, en anglais cumulative distribution function) ou comme $P(X = 136)+P(X = 137)$ ce qui se calcule avec *binompdf* (la fonction de probabilité, en anglais probability distribution function). On trouve $P(X \geq 136) \approx 0,025$.

Exercice 12 Calc. : ✓

Une entreprise agricole fournit des pommes ; 8% des pommes sont abîmées. Vous achetez un panier de 20 pommes choisies au hasard dans la production. On note X la variable comptant le nombre de pommes abîmées dans le panier.

1. Si les pommes sont choisies au hasard, alors le fait qu'une pomme soit abîmée et une autre du même lot est indépendant. Il y a donc bien répétition ($n = 20$ fois) de la même expérience aléatoire (succès : être abîmée avec $p = 8\%$).
2. On demande $P(X = 10)$ ce qui se calcule avec *binompdf* (la fonction de probabilité, en anglais probability distribution function). On trouve $\approx 8,7 \times 10^{-7}$ c'est-à-dire $0,00000087$.
3. On demande $P(X \geq 1)$ ce qu'on peut calculer comme $1 - P(X = 0) \approx 0,81$.
4. On demande $P(2 \leq X \leq 5)$ ce qu'on peut calculer comme $P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$ (ces deux calculs se font avec *binomcdf*, la fonction de répartition, en anglais cumulative distribution function), ou comme $P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$ (ces quatre calculs se font avec *binompdf*, la fonction de probabilité, en anglais probability distribution function). On trouve $\approx 0,48$.
5. Le nombre moyen de pommes abîmées est de $20 \times 0,08 = 1,6$. L'écart-type est de $\sqrt{20 \times 0,08 \times 0,92} \approx 1,2$. Cela veut dire que la plupart des paniers auront $1,6 \pm 1,2$ pommes abîmées.