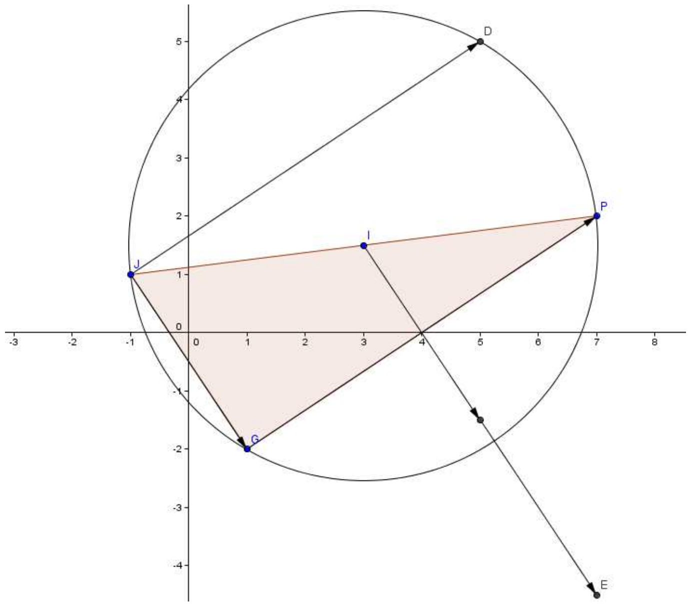
**Exercice 1 - Encadrement de la fonction carré** 5 points

1. Entre 1 et 3, la fonction carré est croissante. Ainsi, si $x \in [1;3]$, $x^2 \in [1^2;3^2]$ soit $\boxed{x^2 \in [1;9]}$.
2. Entre $-2$ et 1 il y a un changement de variations. Il faut donc raisonner avec prudence.
   Entre $-2$ et 0, la fonction carré est décroissante. Ainsi, si $x \in ]-2;0]$, $x^2 \in [0^2;(-2)^2[$ soit $x^2 \in [0;4[$.
   Entre 0 et 1, la fonction carré est croissante. Ainsi, si $x \in [0;1]$, $x^2 \in [0^2;1^2]$ soit $x^2 \in [0;1]$.
   Finalement, $\boxed{x^2 \in [0;4[\cup[0;1] = [0;4[}$.
3. Entre $-2$ et $-1$, la fonction carré est décroissante. Ainsi, si $x \in [-2;-1]$, $x^2 \in [(-1)^2;(-2)^2]$ soit $\boxed{x^2 \in [1;4]}$.
4. Après $-1$ il y a un changement de variations. Il faut donc raisonner avec prudence.
   Entre $-1$ et 0, la fonction carré est décroissante. Ainsi, si $x \in ]-1;0]$, $x^2 \in [0^2;(-1)^2[$ soit $x^2 \in [0;1[$.
   Entre 0 et $+\infty$, la fonction carré est croissante. Ainsi, si $x \in [0;+\infty[$, $x^2 \in [0;+\infty[$.
   Finalement, $\boxed{x^2 \in [0;1[\cup[0;+\infty[= [0;+\infty[}$.

**Exercice 2 - Vecteurs** 17 points

1. 


2. (a) Nous sommes dans un repère orthonormé, donc :
   $GP = \sqrt{(x_P - x_G)^2 + (y_P - y_G)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \boxed{\sqrt{52}}$.

   (b) On va utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour démontrer que le triangle $GPJ$ est rectangle en $G$. Pour cela, il faut que l'on démontre que $JP^2 = GP^2 + GJ^2$.
   $JP^2 = 65$, $GP^2 + GJ^2 = 52 + 13 = 65$. Ainsi $\boxed{\text{le triangle } GPJ \text{ est bien rectangle en } G}$.

   (c) $I$ est le milieu de $[PJ]$, qui est l'hypoténuse du triangle rectangle $GPJ$. Ainsi $I$ est le centre du cercle circonscrit à $GPJ$, et est donc équidistant des trois sommets de $GPJ$. Ainsi $\boxed{IG = IP = IJ}$.

3. (a) $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{JD}$
   $\Leftrightarrow (x_P - x_G; y_P - y_G) = (x_D - x_J; y_D - y_J)$
   $\Leftrightarrow (7-1; 2-(-2)) = (x_D - (-1); y_D - 1)$
   $\Leftrightarrow (6;4) = (x_D + 1; y_D - 1)$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6 = x_D + 1 \\ 4 = y_D - 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6 - 1 = x_D \\ 4 + 1 = y_D \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} 5 = x_D \\ 5 = y_D \end{array}}\right.$$

   (b) $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{JD}$ ainsi $GPDJ$ est un parallélogramme. De plus, on a vu en 2.(b) que l'angle $(\widehat{JGP})$ est droit. Donc $\boxed{GPDJ \text{ est un rectangle}}$.

4. (a) $\overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{JG}$
   $\Leftrightarrow (x_E - x_I; y_E - y_I) = 2(x_G - x_J; y_G - y_J)$
   $\Leftrightarrow (x_E - 3; y_E - \frac{3}{2}) = 2(1-(-1); -2-1)$
   $\Leftrightarrow (x_E - 3; y_E - \frac{3}{2}) = 2(2;-3)$
   $\Leftrightarrow (x_E - 3; y_E - \frac{3}{2}) = (4;-6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = 4 \\ y_E - \frac{3}{2} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 4 + 3 \\ y_E = -6 + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 7 \\ y_E = -\frac{12}{2} + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x_E = 7 \\ y_E = -\frac{9}{2} \end{array}} \end{cases}$$

(b) $\overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{JG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires ainsi $\boxed{\text{les droites } (JG) \text{ et } (IE) \text{ sont parallèles}}$.

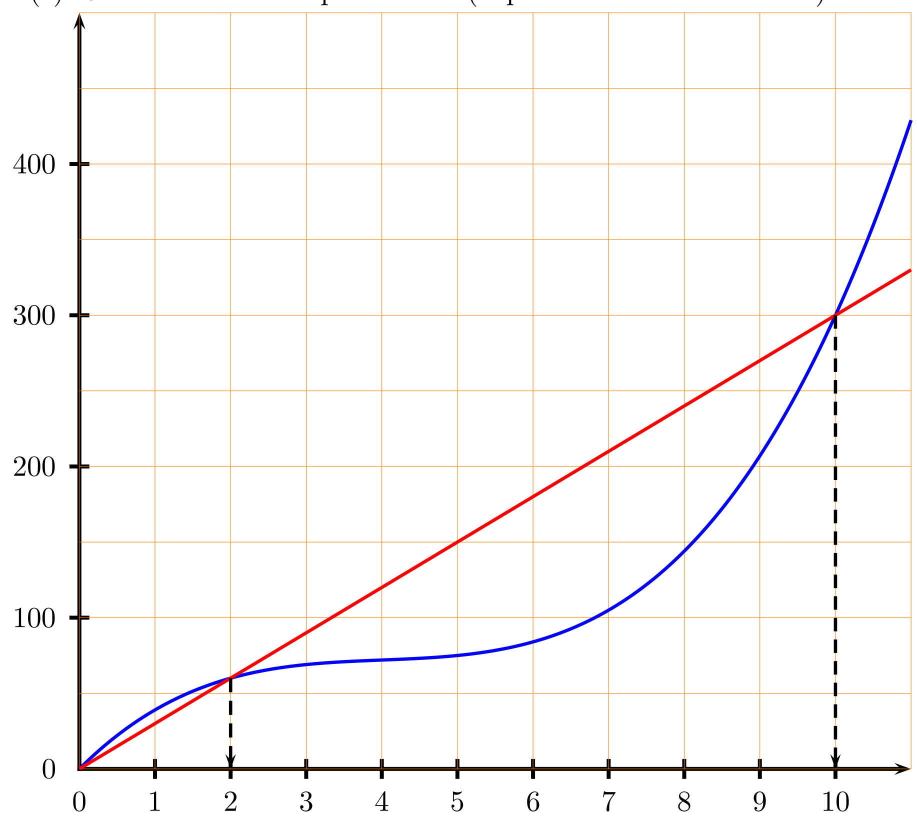
**Exercice 3 - Résolution de problème** 17 points

1. (a) La fonction "Table" de la calculatrice donne le tableau de valeurs suivant :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 39 | 60 | 69 | 72 | 75 | 84 | 105 | 144 | 207 | 300 | 429 |

(b) On nous définit la fonction $f$ sur $[0;11]$, on fixe donc $\boxed{\text{Xmin} = 0\,;\ \text{Xmax} = 11}$. On vient de voir que les valeurs de $f$ étaient comprises entre 0 et 429. On fixe donc $\boxed{\text{Ymin} = 0\,;\ \text{Ymax} = 429}$.

(c) Courbe du coût de production (exprimé en milliers d'euros) en fonction du nombre de tonnes produites.




2. (a) L'entreprise vend 1 tonne de produit pour 30 milliers d'euros donc elle en vend $x$ pour $30x$ milliers d'euros ce qui donne $\boxed{g(x) = 30x}$.

(b) Cf. 1.c)

(c) Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut que ses recettes soient supérieures à ses dépenses. Il faut donc que $g(x) \geq f(x)$. Il nous suffit alors de regarder sur le graphique où $C_g$ est au-dessus de $C_f$. Cf. 1.c) pour les traits de construction, on trouve que c'est le cas pour $x \in [2;10]$. Il faut donc que l'entreprise produise et vende $\boxed{\text{entre 2 et 10 tonnes de produit}}$ pour être bénéficiaire.

3. (a) On sait que bénéfices = recettes - dépenses. On a donc $B(x) = g(x) - f(x) = 30x - (x^3 - 12x^2 + 50x) = \boxed{-x^3 + 12x^2 - 20x}$.

(b)

| $x$ | 0 | | 2 | | 10 | | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sgn** $-x$ | 0 | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| **Sgn.** $x-2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| **Sgn.** $x-10$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| **Sgn** $B(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

On retrouve bien que $B(x) \geq 0$ nous donne $\boxed{\mathcal{S} = [2;10]}$.