AIDE À LA CORRECTION

MATHÉMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B

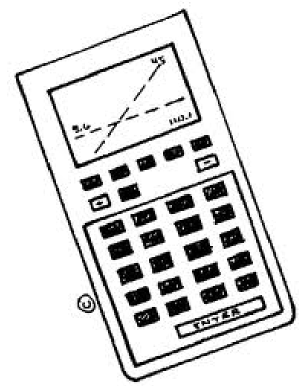
DATE : 7 juin 2022, matin

DURÉE DE L'EXAMEN :

2 heures (120 minutes)

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Examen avec support technologique :
Calculatrice TI-Nspire en mode « Press-to-test »
Crayon pour les graphiques
Formelsammlung / Formula booklet / Recueil de formules



REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Utiliser une nouvelle page pour chaque nouvelle question.
- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées des explications nécessaires à leur élaboration.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Lorsque des graphes sont utilisés pour trouver une solution, la réponse doit inclure des esquisses de ceux-ci.
- Sauf indication contraire dans la question, la totalité des points ne pourra être attribuée à une réponse correcte en l'absence du raisonnement et des explications qui permettent d'arriver aux résultats ou solutions.
- Lorsqu'une réponse est incorrecte, une partie des points pourra cependant être attribuée lorsqu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte ont été utilisées.
- Certaines questions ne peuvent être résolues qu'à l'aide de la calculatrice. La formulation de ces questions l'indique alors clairement. Toutes les autres questions peuvent être résolues avec ou sans calculatrice.

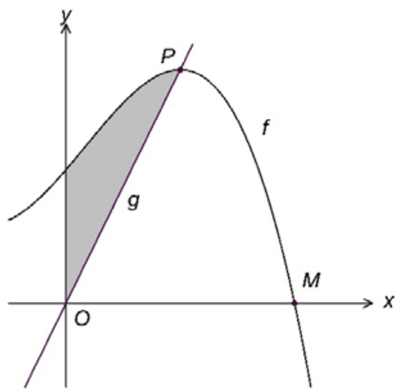
PARTIE B		
QUESTION B1 ANALYSE	**Page 1/3**	**Barème**

Utiliser la calculatrice en a).

On considère la fonction f **définie par**

$f(x) = -x^3 + x^2 + 8x + 16.$

La figure ci-dessous montre le graphique de f**.**
Le graphique de f **coupe l'axe des abscisses au point** M **et** f **admet un maximum en l'abscisse du point** P**.**



a) Établir une équation de la tangente au graphique de f **au point** M**.**	**3 points**

Pour déterminer l'abscisse du point M, on résout l'équation $f(x) = 0$.

$\mathbf{f}(x) := -x^3 + x^2 + 8 \cdot x + 16$ ▸ *Terminé*

$\text{solve}(\mathbf{f}(x) = 0, x)$ ▸ $x = 4$

$M\ (4\ ;\ 0)$

L'équation de la tangente au graphique de f en $x = 4$ est obtenue en utilisant la commande tangentline :

$\text{tangentLine}(\mathbf{f}(x), x, 4)$ ▸ $128 - 32 \cdot x$

Ou : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$\text{fp}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Terminé*

$\mathbf{fp}(4)$ ▸ -32

$y - 0 = -32 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y = -32 \cdot x + 128.$

Dès lors la tangente au graphique de f au point M a pour équation :
$y = -32 \cdot x + 128.$

Détermination de l'abscisse de M : 1 point.
Équation de la tangente : 2 points.

PARTIE B

QUESTION B1 ANALYSE	Page 2/3	Barème
b) Utiliser $f'(x)$ pour montrer que l'abscisse du point P est 2.		**3 points**

$\mathbf{fp}(2) \blacktriangleright 0$

Par conséquent le point P associé à un maximum de f doit avoir pour abscisse 2.

Ou :

Puisque la fonction polynôme f est dérivable et admet un maximum en l'abscisse x du point P, on a nécessairement : $f'(x) = 0$.

$\text{solve}(\mathbf{fp}(x)=0,x)|0<x<4 \blacktriangleright x=2$

Par conséquent, l'abscisse du point P est 2.

c) La droite passant par O et P est le graphique d'une fonction g.

Calculer l'aire de la surface grisée sur le diagramme ci-dessus. — **4 points**

L'aire de la surface délimitée par les graphiques de deux fonctions f et g entre les abscisses a et b est donnée par

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

$\mathbf{f}(2) \blacktriangleright 28$

C'est pourquoi le point P a pour coordonnées : $P(2\ ;\ 28)$.

La pente de la droite (OP) est $m = \dfrac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \dfrac{28-0}{2-0} = 14$ et son ordonnée à l'origine est 0.

Par conséquent la droite (OP) a pour équation $y = 14x$.

Ou :

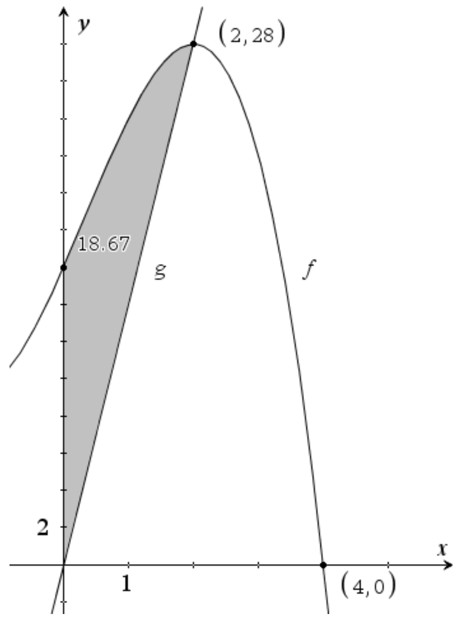
$$\frac{x - x_O}{x_P - x_O} = \frac{y - y_O}{y_P - y_O} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{28}$$
$$\Leftrightarrow y = 14 \cdot x$$

Donc $g(x) = 14x$.

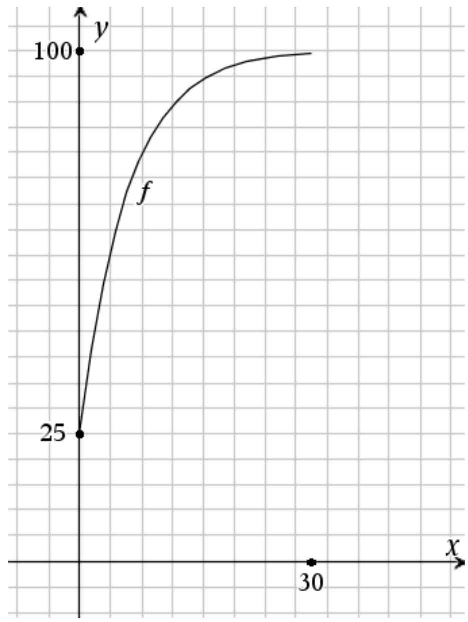
$\mathbf{g}(x) := 14 \cdot x \blacktriangleright \textit{Terminé}$

L'aire $A = \displaystyle\int_0^2 |\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x)|\,dx \blacktriangleright \frac{56}{3}$ et $\dfrac{56}{3} \blacktriangleright 18.6667$

L'aire de la surface grisée vaut donc 18,6667 u.a.

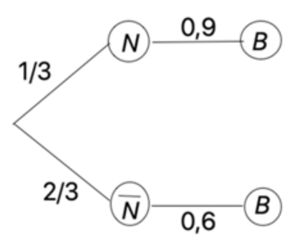
PARTIE B		
QUESTION B1 ANALYSE	**Page 3/3**	**Barème**
L'aire peut également être trouvée sur la figure à l'aide de la calculatrice (voir ci-dessous).  		
Détermination des coordonnées de P et de l'expression de $g(x)$: 2 points. Détermination de l'aire : 2 points.		

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 1/3**	**Barème**
Utiliser la calculatrice pour tous les calculs de cette question. **Pour stériliser une boîte de conserve, on la place dans un four à une température constante de** 100 °C**.** **La température de la boîte de conserve est modélisée par** $f(t) = 100 - 75 \cdot 0{,}85^t$, **où** t **est le temps en minutes après que la boîte a été placée dans le four et** $f(t)$ **est la température en** °C **de la boîte.**		
a) **Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de** 3 **minutes dans le four.**		**2 points**
$\mathbf{f}(t):=100-75\cdot(0.85)^t$ ▸ *Terminé* $\mathbf{f}(3)$ ▸ 53.9406 Au bout de 3 minutes dans le four, la température de la boîte de conserve est approximativement de 54 °C.		
Remplacer t par 3 dans $f(t)$: 1 point. Résultat et conclusion : 1 point.		
b) **La stérilisation démarre dès que la température de la boîte atteint** 85 °C**.** **Au bout de combien de temps dans le four la stérilisation démarre-t-elle ?**		**3 points**
solve$(\mathbf{f}(t)=85,t)$ ▸ t=9.90308 La stérilisation démarre au bout d'environ 10 minutes.		
Écriture de l'équation : 1 point. Résolution de l'équation : 1 point. Conclusion : 1 point.		

PARTIE B		
QUESTION B2 ANALYSE	**Page 2/3**	**Barème**
c) Tracer le graphique de *f* pour les 30 premières minutes.		**3 points**
		
Valeur correcte de l'ordonnée à l'origine : 1 point. Courbe basée sur le calcul de quelques points : 2 points. (accepter la réponse si la courbe continue à droite de x = 30)		
d) Déterminer $f'(10)$ et interpréter le résultat.		**4 points**
$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}(t))\vert t=10 \blacktriangleright 2.39969$ ou : $\mathbf{fp}(t):=\frac{d}{dt}(\mathbf{f}(t)) \blacktriangleright$ *Terminé* et $\mathbf{fp}(10) \blacktriangleright 2.39969$ Ceci veut dire qu'au temps $t=10$ (minutes), la température de la boîte de conserve augmente de 2,4°C par minute.		
Détermination du nombre dérivé $f'(10)$: 2 points. Interprétation : 2 points.		

PARTIE B			
QUESTION B2 ANALYSE		Page 3/3	Barème
e)	**La stérilisation est considérée comme terminée 20 minutes après que la boîte a été placée dans le four si l'intégrale $\int_{10}^{20}(f(t)-85)dt$ vaut au moins 80.** **La stérilisation est-elle terminée au bout de 20 minutes ? Justifier la réponse.**		**3 points**
	$\int_{10}^{20}(f(t)-85)\,dt \blacktriangleright 77.0324$ L'intégrale est inférieure à 80, donc la stérilisation n'est pas terminée.		
	Calcul : 2 points. Conclusion : 1 point.		

PARTIE B

QUESTION B3 PROBABILITÉS	Page 1/2	Barème
Utiliser la calculatrice en c), d) et e). **Giuseppe vit à côté d'une station de ski.** **Tous les jours, il fait du ski ou du snowboard.** **S'il a neigé pendant la nuit, la probabilité qu'il fasse du snowboard est de** 0,9. **S'il n'a pas neigé pendant la nuit, la probabilité qu'il fasse du snowboard est de** 0,6. **Pendant l'hiver, la probabilité qu'il neige pendant la nuit est de** $\frac{1}{3}$.		
a) Montrer que la probabilité que Giuseppe fasse du snowboard est de 0,7.		**3 points**
On considère les événements suivants : *N* = "il a neigé pendant la nuit" et *B* = "Giuseppe fait du snowboard" $P(B) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}9 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}6 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7.$  		
Arbre : 1 point. Calculs : 2 points.		
b) Étant donné que Giuseppe est allé faire du snowboard, calculer la probabilité qu'il ait neigé pendant la nuit. Il faut déterminer $P(N\|B)$. $P(N\|B) = \frac{P(N\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}9}{0{,}7} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}.$		**3 points**
Écriture de la probabilité à calculer : 1 point. Calculs: 2 points.		

PARTIE B		
QUESTION B3 PROBABILITÉS	**Page 2/2**	**Barème**
c) **La saison de ski dure** 125 **jours.** **Calculer la probabilité que Giuseppe ait fait du snowboard pendant au moins** 90 **jours au cours de cette saison.**		**3 points**
La variable aléatoire *X* désigne le nombre de jours de snowboard effectués par Giuseppe au cours de cette saison. *X* suit une loi binomiale de paramètres $n=125$ et $p=0{,}7$. $P(X\geq 90)=\text{binomCdf}(125,0.7,90,125) \blacktriangleright 0.352343$ La probabilité que Giuseppe ait fait du snowboard pendant au moins 90 jours au cours de cette saison est d'environ 0,35.		
Reconnaissance de la loi binomiale et de ses paramètres : 1 point. Calculs et conclusion : 2 points.		
d) **Une semaine particulière, il décide de skier tous les jours du lundi au vendredi si les conditions sont bonnes. Pendant ces** 5 **jours, la probabilité que les conditions soient bonnes un jour donné est de** 0,4**.** **Calculer la probabilité que, pendant ces** 5 **jours, Giuseppe ne skie que le lundi et le vendredi.**		**3 points**
La probabilité que, pendant ces 5 jours, Giuseppe ne skie que le lundi et le vendredi est donnée par : $(0.4)^2\cdot(0.6)^3 \blacktriangleright 0.03456$ $0{,}4^2\cdot 0{,}6^3\approx 0{,}035$.		
Écriture correcte de la formule : 2 points. Calcul : 1 point.		
e) **Le temps de trajet du téléski qu'il emprunte est normalement distribué avec une moyenne de** 18 **minutes et un écart-type de** 2 **minutes.** **Calculer la probabilité qu'un trajet prenne plus de** 20 **minutes.**		**3 points**
$\text{normCdf}(20,\infty,18,2) \blacktriangleright 0.158655$ La probabilité qu'un trajet prenne plus de 20 minutes est d'environ 0,16.		
Calcul : 2,5 points. Conclusion : 0,5 point.		

PARTIE B

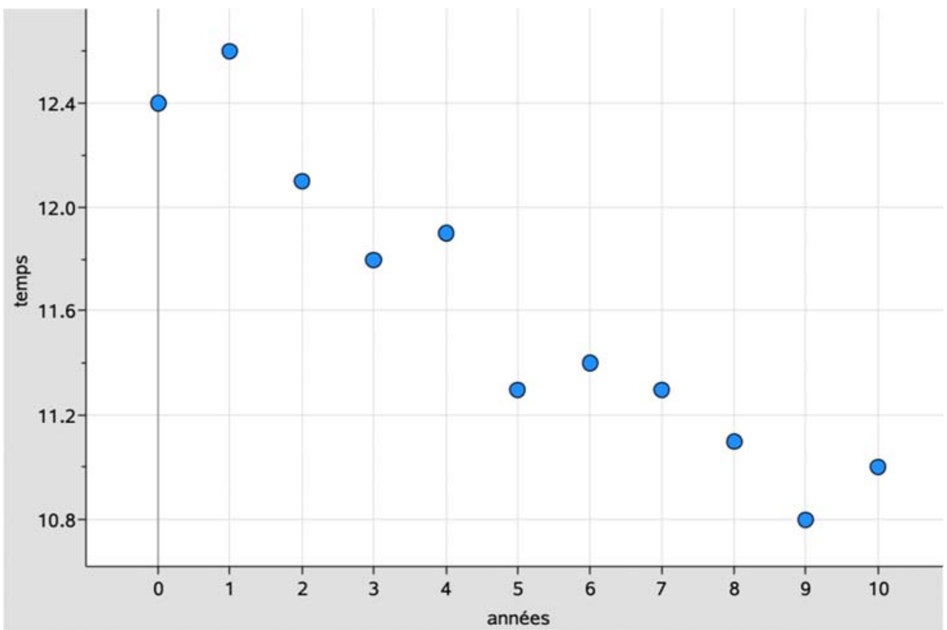
QUESTION B4 STATISTIQUES	Page 1/3	Barème

Utiliser la calculatrice en b).

L'université A, spécialisée dans les sciences du sport, tient un registre de ses compétitions annuelles. Les données affichées dans le tableau ci-dessous montrent les temps gagnants du sprint masculin sur 100 mètres, où x est le nombre d'années après 2010 et y le temps gagnant en secondes.

Année	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**
***x* années après 2010**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
***y* secondes**	12,4	12,6	12,1	11,8	11,9	11,3	11,4	11,3	11,1	10,8	11,0

a) Tracer un diagramme en nuage de points en utilisant les données du tableau. **3 points**



PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 2/3**	**Barème**

b) **Établir une équation de la forme $y = m \cdot x + b$ de la régression linéaire de y en x en utilisant les données du tableau.**
Donner les nombres m et b arrondis au centième (2 décimales). — **4 points**

	A années	B temps	C	D	E	F
=					=LinRegM	
1	0	12.4		Titre	Régress...	
2	1	12.6		RegEqn	m*x+b	
3	2	12.1		m	⁻0.17	
4	3	11.8		b	12.4591	
5	4	11.9		r²	0.911126	
6	5	11.3		r	⁻0.9545...	
7	6	11.4		Resid	{⁻0.0590...	
8	7	11.3				
9	8	11.1				
10	9	10.8				
11	10	11.				

E1 ="Régression linéaire (mx+b) "

Équation de la droite de régression : $y = -0{,}17x + 12{,}46$ (2 décimales).

Équation correcte : 4 points.

Dans les questions suivantes, utiliser le modèle $y = -0{,}17x + 12{,}5$ pour l'université A.

c) **Estimer le temps gagnant du sprint sur 100 mètres en 2022.** — **3 points**

En 2022, $t = 12$.

$\mathbf{f}(x) := ^{-}0.17 \cdot x + 12.5$ ▸ *Terminé*

$\mathbf{f}(12)$ ▸ 10.46

Selon le modèle, le temps gagnant du sprint sur 100 mètres sera d'environ 10,5 secondes en 2022.

Valeur correcte de t : 0,5 point.
Calcul et conclusion : 2,5 points.

PARTIE B		
QUESTION B4 STATISTIQUES	**Page 3/3**	**Barème**
d) **D'après le modèle, en quelle année le temps gagnant du sprint sur 100 mètres descendra-t-il en dessous de** 10 **secondes ?**		**3 points**
$\text{solve}(10=-0.17\cdot x+12.5,x) \blacktriangleright x=14.7059$ ou : $\text{solve}(10>-0.17\cdot x+12.5,x) \blacktriangleright x>14.7059$ D'après le modèle, le temps gagnant du sprint sur 100 mètres lors de la compétition annuelle passera sous la barre des 10 secondes en 2025 (2010+15 car « après plus de 14,7059 ans » signifie ici « après 15 ans »).		
Écriture de l'équation ou de l'inéquation à résoudre : 1 point. Résolution de l'équation ou de l'inéquation et conclusion : 2 points.		
e) **Que nous révèle le nombre** $-0{,}17$ **dans le modèle et de combien de secondes le temps gagnant baisse-t-il sur une période de** 5 **ans ?**		**4 marks**
Le nombre $-0{,}17$ figurant dans le modèle nous indique que le temps gagnant diminue chaque année d'environ 0,17 seconde. Le temps gagnant diminue donc de $5\cdot 0{,}17=0{,}85$ secondes sur une période de 5 ans.		
Interprétation du coefficient $-0{,}17$: 2 points. Réponse sur 5 ans : 2 points.		
f) **L'université B, spécialisée dans les sciences du sport, organise également des compétitions annuelles. Les temps gagnants de leur sprint masculin sur 100 mètres sont modélisés par** $y=-0{,}20x+13{,}9$ **pour la même période.** **En utilisant les deux modèles, estimer en quelle année les temps gagnants des compétitions annuelles des deux universités différeront pour la première fois de moins de** 1,0 **seconde.**		**3 points**
Dans les premières années, l'université A est plus rapide que l'université B. $\text{solve}(-0.2\cdot x+13.9-(-0.17\cdot x+12.5)<1.,x) \blacktriangleright x>13.3333$ D'après les deux modèles, les temps gagnants des universités différeront pour la première fois de moins de 1,0 seconde lors du concours annuel de 2024 (2010+14 car « après plus de 13,33 ans » signifie ici « après 14 ans »).		
Écriture et résolution de l'inéquation (ou méthodes alternatives) : 2 points. Conclusion : 1 point.		