Exercice 1 — 5 points

Question 1 - Logique

Le contraire de « Il existe au moins un réel x tel que $f(x) > 0$ » est « Il n'existe aucun réel x tel que $f(x) > 0$ ». C'est donc équivalent à la $\boxed{\text{proposition D}}$: « Pour tout réel x, $f(x) \leq 0$ ». On peut retenir la chose suivante :

- le contraire de « Il existe un élément x de l'ensemble E qui vérifie la propriété $P(x)$ » est « Pour tout élément x de l'ensemble E, la propriété $P(x)$ est fausse »
- et donc réciproquement le contraire de « Pour tout élément x de l'ensemble E, x vérifie la propriété $P(x)$ » est « Il existe un élément x de l'ensemble E qui ne vérifie pas la propriété $P(x)$ »

Question 2 - Matrices

En regardant les quatre propositions qui s'offrent à nous, on voit que le coefficient $(M^2)_{1,3}$ permet de discriminer la bonne matrice : effectivement il est différent pour chacune des quatres propositions. Calculons donc simplement ce coefficient :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \times \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\end{array}$$

Ainsi $(M^2)_{1,3} = 1 \times a + 0 \times 0 + a \times 0 = a$. C'est $\boxed{\text{la proposition B}}$. On pouvait également faire faire le calcul par la machine, en choisissant une valeur de a qui donne également 4 valeurs distinctes (donc ni 0 ni 2 : pour être sûr on pouvait par exemple prendre un nombre compliqué comme $a = 3,14$, regarder M^2 à la calculatrice, et déduire la réponse !)

Question 3 - Ensembles

Si E et F sont deux ensembles, $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$, ce qui nous conduit également à, si $n \in \mathbb{N}^*$, $card(E^n) = card(E)^n$.

Ainsi $card(E^3) = card(E)^3 = 2^3 = 8$, soit $\boxed{\text{la proposition D}}$.

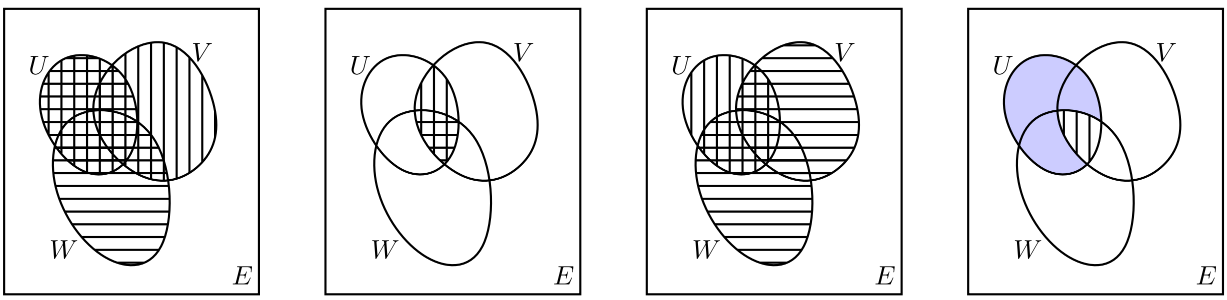
Question 4 - Ensembles

Proposition A : $(U \cup V)$ hachuré verticalement, $(U \cup W)$ hachuré horizontalement ; donc la proposition A est celle qui est hachurée à la fois des deux façons.

Proposition B : $(U \cap V)$ hachuré verticalement, $(U \cap V \cap W)$ hachuré horizontalement ; donc la proposition B est celle qui est hachurée d'au moins une des deux façons.

Proposition C : U hachuré verticalement, $(V \cup W)$ hachuré horizontalement ; donc la proposition C est celle qui est hachurée à la fois des deux façons.

Proposition D : $(U \cap V \cap W)$ hachuré verticalement ; donc la proposition D est celle qui est grisée



Ainsi la partie grisée dans l'énoncé correspond à $\boxed{\text{la proposition C}}$.

Question 5 - Suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de terme initial $u_0 = -2$ et de raison $q = -0,5$. Cette suite a pour limite 0 : $\boxed{\text{la proposition C}}$. Effectivement la raison q vérifie $-1 < q < 1$.

Exercice 2 **6 points**

1. Le 4 est le coefficient $M_{1,3}$. Il correspond au nombre de pièces de modèle m_1 nécessaires pour fabriquer un produit C.
2. Si on note $Y = MX$, alors à la ligne 1 on retrouve le nombre de pièces de modèle m_1 pour fabriquer les $X_{1,1}$ produits A, les $X_{2,1}$ produits B et les $X_{3,1}$ produits C. De même à la ligne 2 on retrouve le nombre de pièces de modèle m_2 nécessaires, et à la ligne 3 le nombre de pièces de modèle m_3 nécessaires. C'est le genre de calculs que l'on a maintenant l'habitude de mener.

   Ici, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 27 \\ 40 \end{pmatrix}$.

   Pour ce programme de production, il faut donc disposer de $\boxed{50}$ pièces de modèle m_1, $\boxed{27}$ pièces de modèle m_2 et $\boxed{40}$ pièces de modèle m_3.
3. (a) Il faut effectuer la première ligne du produit matriciel suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} & \end{array}$$

   Le coefficient $(PM)_{i,j}$ est égal à la ligne i de P multipliée par la colonne j de M. On doit ici calculer la première ligne de PM, donc $(PM)_{1,1}$, $(PM)_{1,2}$ et $(PM)_{1,3}$.

$$(PM)_{1,1} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \times 3 + y \times 2 + 0 \times 1 = 3x + 2y$$

$$(PM)_{1,2} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x \times 2 + y \times 1 + 0 \times 3 = 2x + y$$

$$(PM)_{1,3} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x \times 4 + y \times 2 + 0 \times 3 = 4x + 2y$$

   Ainsi la première ligne de PM vaut $\boxed{\begin{pmatrix} 3x + 2y & 2x + y & 4x + 2y \end{pmatrix}}$

   (b) Pour que PM soit égal à I_3, il faut que tous les coefficients soient égaux. On voit que c'est déjà bien le cas pour les 2 dernières lignes, il faut donc maintenant trouver x et y vérifiant $\begin{pmatrix} 3x + 2y & 2x + y & 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 1 \\ 2x + y & = & 0 \\ 4x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

   On peut remarquer de suite que la 3$^{\text{ème}}$ ligne est le double de la 2$^{\text{ème}}$, et que cela ne mènera à rien d'utiliser ces deux lignes à la fois pour la résolution. On peut résoudre le système par substitution :

   - la ligne 2 nous dit que $y = -2x$ (en soustrayant $2x$ de chaque côté)
   - en remplaçant dans la ligne 1, on obtient $3x + 2(-2x) = 1$ soit $-x = 1$ soit $x = -1$

- en re-remplaçant dans la ligne 2, on obtient $y = -2 \times (-1) = 2$.
- si on n'avait pas remarqué que la 3ème ligne était le double de la 2ème, il fallait remplacer et vérifier que $4 \times (-1) + 2 \times 2 = 0$

Ainsi il faut choisir $\boxed{x = -1 \text{ et } y = 2}$.

(c) On vient de voir que $PM = I_3$, qui est la matrice neutre pour la multiplication, donc :

$$\begin{aligned} MX &= Y && \text{On multiplie à gauche par } P \\ PMX &= PY && PM = I_3 \text{ d'après l'énoncé.} \\ I_3X &= PY && I_3 \text{ est neutre pour la multiplication} \\ X &= PY \end{aligned}$$

(d) L'énoncé nous dit que $MX = \begin{pmatrix} 67 \\ 36 \\ 59 \end{pmatrix}$, ainsi on peut calculer $X = P \times \begin{pmatrix} 67 \\ 36 \\ 59 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On peut donc conclure que le programme de production qui épuisera le stock de cette journée est constitué de $\boxed{\text{5 pièces A}}$, $\boxed{\text{10 pièces B}}$ et $\boxed{\text{8 pièces C}}$.

Exercice 3 **6 points**

1. La proposition P est écrite sous la forme « Soit P_1, soit P_2 », c'est donc une disjonction des deux cas P_1 et P_2.
   Il est facile de voir que $P_1 = B$ et $P_2 = \neg B \wedge C$, ainsi $\boxed{P = B \vee (\neg B \wedge C)}$.
2. La table de vérité de la proposition P est la suivante :

A	B	C	$\neg B$	$\neg B \wedge C$	$B \vee (\neg B \wedge C)$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

3.
$$\begin{aligned} M &= \neg P && \text{On remplace } P \text{ (question 1)} \\ &= \neg(B \vee (\neg B \wedge C)) && (\neg(Q \vee R)) \equiv (\neg Q \wedge \neg R) \text{ (de Morgan)} \\ &= \neg B \wedge \neg(\neg B \wedge C) && (\neg(Q \wedge R)) \equiv (\neg Q \vee \neg R) \text{ (de Morgan)} \\ &= \neg B \wedge (\neg\neg B \vee \neg C) && \neg\neg Q \equiv Q \text{ (tiers exclus)} \\ &= \neg B \wedge (B \vee \neg C) && \text{Distributivité} \\ &= (\neg B \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg C) && \text{(tiers exclus)} \\ &= Faux \vee (\neg B \wedge \neg C) && Faux \vee Q \equiv Q \\ &= \neg B \wedge \neg C \end{aligned}$$

4. L'affirmation du meneur de jeu correspond donc à la situation :
   $\boxed{\text{« Il n'y a pas de louis d'or dans le moyen coffret ni dans le grand coffret. »}}$
5. (a) $\boxed{J = A \vee B \vee C}$.
   (b) Étant donné qu'il y a au moins un louis d'or dans l'un des coffrets, et qu'il n'y en a ni dans le moyen ni dans le grand (le meneur ne ment jamais), alors on est certains de trouver un louis d'or si on ouvre $\boxed{\text{le petit coffret}}$.

Exercice 4 **3 points**

1.

2	C
0010	1100

Ainsi le code binaire de la virgule est $\boxed{101100_{(2)}}$.

2. (a)

0100	1010
4	A

Ainsi 0100 $1010_{(2)} = 4A_{(16)}$. Puisque le code ASCII de la lettre 'A' (majuscule) est $41_{(16)}$, c'est donc que ce code ASCII correspond à la $10^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet (car $A_{(16)} = 10_{(10)}$), donc à la lettre $\boxed{\text{'J'}}$.

(b) 'Z' est la $26^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet, ainsi il faut rajouter $25_{(10)}$ au code de 'A'. On peut compter « à la main » en hexadécimal, ou bien en posant l'addition comme en primaire (avec les retenues), ou bien encore convertir $41_{(16)}$ en base 10, ajouter 25, et reconvertir en hexadécimal.

Dans tous les cas, on trouve que le code ASCII de la lettre 'Z' est $\boxed{5A_{(16)}}$.

(c) C'est exactement la même question que précédemment, sauf que la méthode la plus simple était de voir que $32_{(10)} = 20_{(16)}$ et donc l'addition en hexadécimal est simple, sans aucune retenue : $41_{(16)} + 20_{(16)} = \boxed{61_{(16)}}$.