Devoir Maison n°2 Pour le lundi 10 mars 2014

Exercice 1 : Des couples parfaits

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriéts remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.
- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

1 Partie 1

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il des couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard et Cécile proposent les algorithmes suivants :

Algorithme de Bernard.

Variable :
i est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :
Pour i de 10 à 88, faire
    Si $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i+11}$ est un entier, alors
        Afficher i et $i+11$
    Fin Si
Fin Pour

Algorithme de Cécile.

Variable :
i est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :
Pour i de 4 à 9, faire
    Si $\sqrt{i^2+11}$ est un entier, alors
        Afficher i^2 et i^2+11
    Fin Si
Fin Pour

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (Si) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

(a) Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représentent les valeurs de la variable i lors des affichages.

(b) Quel est le temps de l'algorithme de Cécile ?

2 Partie 2

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

1. Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ? Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?
2. Programmer l'algorithme modifié de Bernard ou de Cécile avec Python. Quelle est la réponse au problème posé ?

Exercice 2 : Fleuriste

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes produit une fleur par an, la fleur est rose ou blanche.

Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est $\frac{3}{4}$ et la probabilité de donner une fleur blanche est $\frac{1}{4}$.

Au cours des années ultérieures, la floraison obéit aux règles suivantes définies pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose ;
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche alors, elle donnera, l'année $n+1$, de façon équiprobable, une fleur rose ou une fleur blanche.

n désigne un entier naturel non nul.

Pour une plante donnée, R_n désigne l'évènement : « la plante donne une fleur rose la n^{e} année ».

1. On note p_n la probabilité de l'évènement R_n ; on a donc $P(R_1) = p_1 = \frac{3}{4}$.

   À l'aide des données de l'énoncé, déterminer la probabilité $p(R_2)$ d'obtenir une fleur rose la seconde année. (On pourra éventuellement s'aider d'un arbre pondéré).

2. On admet que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ vérifie la relation de récurrence

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

   Soit $(q_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout entier naturel non nul n, par :

$$q_n = p_n - 1$$

   (a) Montrer que $(q_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$; calculer q_1.

   (b) Déterminer q_n en fonction de n.

   (c) En déduire p_n en fonction de n ; donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

3. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?