Exercice 1 : Des couples parfaits

1 Partie 1

1. L'ensemble des carrés parfaits à deux chiffres est $C_2 = \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$.

   On peut commencer par remarquer que l'on doit travailler modulo 10. Effectivement "ajouter 1 à chaque chiffre" est toujours simple, sauf lorsqu'il s'agit d'ajouter 1 à 9 (on aboutit alors à 10 qui n'est pas un chiffre). Il faut donc comprendre que lorsqu'on ajoute 1 à 9, cela donne 0. Il faut donc traiter 49 différemment : si on ajoute 1 à chaque chiffre de 49 on aboutit à 50 qui n'est pas un carré parfait.

   Pour les nombres qui ne comportent pas de 9, il suffit d'ajouter 11 :
   $16+11 = 27 \notin C_2$; $25+11 = 36 \in C_2$; $36+11 = 47 \notin C_2$; $64+11 = 75 \notin C_2$; $81+11 = 92 \notin C_2$.

   Ainsi le seul couple parfait d'entiers à deux chiffres est celui de l'énoncé : $\boxed{(25; 36)}$.

2. Remarque : les algorithmes pourraient aboutir à une erreur. Effectivement si a^2 comporte un 9, et $a^2 + 11$ est aussi un carré parfait, alors le couple $(a^2; a^2 + 11)$ n'est pas un couple parfait ! Effectivement si le chiffre des unités est un 9, notons d le chiffre des dizaines. En augmentant de 11, le chiffre des unités devient 0 (qui est bien 9 augmenté de 1, on travaille modulo 10 évidemment !) mais le chiffre des dizaines devient $d+2$ (report de la retenue), et pas $d+1$ comme le veut l'énoncé. Par ex. $49+11 = 60$. Ainsi, s'il se trouve que ces algorithmes fonctionnent, c'est que par chance les carrés parfaits qui ont un 9 dans leurs chiffres ne sont jamais les premiers d'un couple parfait.

   (a) Pour l'algorithme de Bernard, lorsque l'on fait un affichage, $(i; i+11)$ est un couple parfait. $\boxed{i \text{ représente le premier entier de ce couple parfait.}}$

   Pour l'algorithme de Cécile, lorsque l'on fait un affichage, $(i^2; i^2+11)$ est un couple parfait. $\boxed{i \text{ représente la racine du premier entier de ce couple parfait.}}$

   (b) L'algorithme de Cécile a un temps de $\boxed{6}$. Effectivement on rentre 6 fois dans la boucle : de 4 à 9 (compris) il y a 6 entiers (9 - 4 + 1).

2 Partie 2

1. L'algorithme de Bernard explore tous les nombres à 4 chiffres qui, augmenté de 1 111, ont également 4 chiffres (de 1 000 jusqu'à 8 888, car $8\ 888 + 1\ 111 \geq 9\ 999$ mais $8\ 889 + 1\ 111 = 10\ 000 > 9\ 999$), pour savoir si ce nombre est un carré parfait, et si en rajoutant 1 à chaque chiffre (donc en ajoutant 1 111 au nombre, même si comme on l'a vu ce n'est pas tout à fait juste lorsque le nombre contient un 9) c'est aussi un carré parfait. On obtient :

   Algorithme de Bernard modifié.

   Variable :
   i est un nombre entier.

   Corps de l'algorithme :

   ```
   Pour i de 1 000 à 8 888, faire
       Si √i est un entier et √(i + 1 111) est un entier, alors
           Afficher i et i + 1 111
       Fin Si
   Fin Pour
   ```

   Cet algorithme a un temps de $\boxed{7\ 889}$.

   L'algorithme de Cécile explore tous les nombres dont le carré comporte 4 chiffres et donc le carré auquel on rajoute un 1 à chaque chiffre comporte 4 chiffres également, c'est à dire de

32 à 94 (car $31^2 = 961 < 1\ 000$ et $32^2 = 1\ 024 \geq 1\ 000$; $94^2 + 1\ 111 = 9\ 947 \leq 9\ 999$ et $95^2 + 1\ 111 = 10\ 136 > 9\ 999$). On obtient donc :

Algorithme de Cécile modifié.

Variable :
i est un nombre entier.

Corps de l'algorithme :

```
Pour i de 32 à 94, faire
    Si √(i² + 1 111) est un entier, alors
        Afficher i² et i² + 1 111
    Fin Si
Fin Pour
```

Cet algorithme a un temps de $\boxed{63}$.

2. Il y a un seul couple parfait d'entiers à quatre chiffres : $\boxed{(2\ 025; 3\ 136)}$.

Exercice 2 : Fleuriste

Cet exercice était tiré du BTS Informatique de Gestion, Novembre 2008, Nouvelle-Calédonie.
Correction en classe.