1 Cours

Soit u une suite géométrique de terme initial $u_0 = -1$. Nous avons vu dans le cours qu'il y a 4 cas possibles :

- $q = 1$: suite constante égale à -1 donc convergente vers -1
- $-1 < q < 1$: suite convergente vers 0
- $q > 1$: la limite est $-\infty$
- $q \leq -1$: pas de limite (quand $q = -1$ cela oscille une fois -1 une fois 1, et quand $q < -1$ cela oscille avec des valeurs de plus en plus grande, une fois dans le positif une fois dans le négatif)

2 Exercice - Adapté de Nouvelle-Calédonie, 3 novembre 2013

Partie A : un premier virus

1. En utilisant la formule pour $n = 1$ il vient $U_2 = 1 + 2U_1 = \boxed{3}$
   En l'utilisant pour $n = 2$ il vient $U_3 = 1 + 2U_2 = \boxed{7}$
   En l'utilisant pour $n = 3$ il vient $U_4 = 1 + 2U_3 = \boxed{15}$

n	1	2	3
u_n	1	3	7

$+2$ $\quad$ $+4$

On n'a pas la même addition à faire, ce n'est pas une suite arithmétique.

n	1	2	3
u_n	1	3	7

$\times 3$ $\quad$ $\times \dfrac{7}{3}$

On n'a pas la même multiplication à faire, ce n'est pas une suite géométique.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ n'est ni arithmétique ni géométrique}}$.

2. En utilisant la formule pour $n = 1, 2, 3$ et 4, on trouve :
   $\boxed{V_1 = 2\,;\ V_2 = 4\,;\ V_3 = 8\,;\ V_4 = 16}$
   On peut conjecturer que la suite (V_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison 2 et de terme initial } v_1 = 2}$.
3. (a) $V_{n+1} = U_{n+1} + 1 = 1 + 2U_n + 1 = 2U_n + 2 = 2(U_n + 1) = 2V_n.\square$
   (b) On peut en déduire que $V_n = V_1 \times \text{raison}^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = \boxed{2^n}$.
4. (a) Puisque $V_n = U_n + 1$, on en déduit que $U_n = V_n - 1 = 2^n - 1.\square$
   (b) $\underset{n \to +\infty}{lim} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$. En retirant 1, cela ne change donc pas : $\boxed{\underset{n \to +\infty}{lim} u_n = +\infty}$
   (c) À l'aide de la calculatrice on voit que $U_9 = 511$ et $U_{10} = 1\,023$ donc c'est $\boxed{\text{à partir de 10 allumages}}$ de l'ordinateur que le nombre de fichiers infectés sera supérieur à 1 000.
   On peut aussi résoudre $2^n - 1 \geq 1\,000 \Leftrightarrow 2^n \geq 1\,001 \Leftrightarrow log(2^n) \geq log(1\,001) \Leftrightarrow$
   $n log(2) \geq log(1\,001) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{log(1\,001)}{log(2)} \approx 9,97$

Partie B : un deuxième virus

1.

n	$3^n - 1$	W_n
1	2	2
2	8	8
3	26	4
4	80	3
5	242	0

2. On déduit de la question précédente que $X_1 = W_{5\times 1} = \boxed{0}$.

   $X_2 = W_{5\times 2} = W_{10}$. Il faut donc calculer $3^{10} - 1 = 59\ 048$. Or $59\ 048 = 5\ 368 \times 11$ donc $\boxed{X_2 = 0}$.

   $X_3 = W_{5\times 3} = W_{15}$. Il faut donc calculer $3^{15} - 1 = 14\ 348\ 906$. Or $14\ 348\ 906 = 1\ 304\ 446 \times 11$ donc $\boxed{X_3 = 0}$.

3. On peut donc conjecturer que X est $\boxed{\text{constante égale à } 0}$. On peut en déduire que le message d'avertissement apparait $\boxed{\text{tous les 5 allumages de l'ordinateur, à partir du } 5^{\text{eme}} \text{ allumage}}$.