Exercice 1 - Tiré de BTS Informatique & Gestion, Décembre 2002, Nouvelle-Calédonie

1. (a)

A		ab			
		00	01	11	10
c	0	1	1	1	1
	1	1	0	0	0

On déduit donc que $\boxed{\mathrm{A} = \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= a\ b\ \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}\ c + \overline{a}\ b\ \overline{c} + a\ \overline{b}\ \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c} \\
&= \overline{c}\ (a\ b + \overline{a}\ b + a\ \overline{b} + \overline{a}\ \overline{b}) + \overline{a}\ \overline{b}\ c \\
&= \overline{c}\ (1) + \overline{a}\ \overline{b}\ c \\
&= \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}\ c \\
&= (\overline{c} + c) \cdot (\overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}) \\
&= 1 \cdot (\overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}) \\
&= \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
(x \longrightarrow 0) &= \overline{x} + 0 \\
&= \overline{x}
\end{aligned}$$

(b) Pour démontrer cette égalité, partons du membre de droite, et remplaçons avec la définition de l'opérateur $\longrightarrow$:

$$\begin{aligned}
((x \longrightarrow 0) \longrightarrow y) &= \overline{x \longrightarrow 0} + y \\
&= \overline{\overline{x}} + y \\
&= x + y
\end{aligned}$$

Enfin, d'après 2)a) pour toute proposition P, $(P \longrightarrow 0) = \overline{P}$, donc en utilisant cette formule avec $P = (x \longrightarrow 0) \longrightarrow y$:

$$\begin{aligned}
(((x \longrightarrow 0) \longrightarrow y) \longrightarrow 0) &= \overline{(x \longrightarrow 0) \longrightarrow y} \\
&= \overline{x + y} \\
&= \overline{x}\ \overline{y}
\end{aligned}$$

D'après ce qu'on vient de montrer

D'après les lois de De Morgan

(c) On vient de voir que :

- $\overline{c} = (c \longrightarrow 0)$
- $\overline{a}\ \overline{b} = (((a \longrightarrow 0) \longrightarrow b) \longrightarrow 0)$
- $P + Q = ((P \longrightarrow 0) \longrightarrow Q)$

Puisque $\mathrm{A} = \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b}$, on applique la troisième formule à $P = \overline{c}$ (transformé par la première formule) et à $Q = \overline{a}\ \overline{b}$ (transformé par la seconde formule). On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \overline{c} + \overline{a}\ \overline{b} \\
&= ((\overline{c} \longrightarrow 0) \longrightarrow (\overline{a}\ \overline{b})) \\
&= (((c \longrightarrow 0) \longrightarrow 0) \longrightarrow (((a \longrightarrow 0) \longrightarrow b) \longrightarrow 0))
\end{aligned}$$

Exercice 2 - Adapté de BTS Services informatiques aux organisations, Mai 2013, Métropole

Partie A : 1re modélisation

1. u_0 est le prix, en euros, de ce modèle 0 trimestre après sa mise sur le marché, soit le prix de vente initial : $\boxed{u_0 = 795}$.
   Diminuer de 10%, c'est multiplier par $1 - 10\%$ donc par $0,9$. Ainsi $u_1 = 0,9 \times u_0 = 0,9 \times 795 = \boxed{715{,}5}$
   De la même manière $u_2 = 0,9 \times u_1 = 0,9 \times 715,5 = \boxed{643{,}95}$.
2. Etant donné que de trimestre en trimestre on applique toujours la même diminution, on passe d'un terme au suivant de la suite toujours par la même multiplication par 0,9. Ainsi la suite u est $\boxed{\text{une suite géométrique}}$, et ses éléments caractéristiques sont :
   - terme initial : $u_0 = 795$
   - raison : $q = 0,9$
3. $$\begin{array}{rcll} 795 \times 0,9^x & < & 300 & \\ & & & \div 795 \\ 0,9^x & < & \dfrac{300}{795} & \\ & & & \text{On "passe au logarithme"} \\ log(0,9^x) & < & log\left(\dfrac{300}{795}\right) & \\ & & & log(a^x) = x \times log(a) \\ x \times log(0,9) & < & log\left(\dfrac{300}{795}\right) & \\ & & & \div log(0,9) \\ x & > & \dfrac{log(\frac{300}{795})}{log(0,9)} & \end{array}$$
   Attention, dans la division $log(0,9)$ est un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité !
   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left] \dfrac{log(\frac{300}{795})}{log(0,9)} ; +\infty \right[}$.
   Le premier entier plus grand que $\dfrac{log(\frac{300}{795})}{log(0,9)}$ est 10. Ainsi il faut au minimum $\boxed{\text{10 trimestres}}$ pour que le prix de vente d'un tel ordinateur devienne strictement inférieur à 300 €.

Partie B : 2e modélisation

1. Le prix de vente de ce modèle d'ordinateur à sa mise sur le marché est donné en euros par v_0. On calcule $v_0 = 525\mathrm{e}^{-0,25\times 0} + 270 = 525 \times 1 + 270 = \boxed{795}$.
2. On tape $Y1 = 525\mathrm{e} \wedge (-0,25X) + 270$ et on regarde la table de valeurs.
   On voit que $v_{11} \approx 304 > 300$ et $v_{12} \approx 296 < 300$. Ainsi il faut au minimum $\boxed{\text{12 trimestres}}$ pour que le prix de vente d'un tel ordinateur devienne inférieur ou égal à 300 €.

Partie C : comparaison des deux modèles

1. Il faut donc calculer u_5 et v_5. On peut utiliser la formule $u_n = 795 \times 0,9^n$.
   $u_5 = 795 \times 0,9^5 \approx 469,44$ et $v_5 \approx 420,42$.
   5 trimestres après la mise sur le marché, $\boxed{\text{le premier modèle sera vendu 469,44€ et le second 420,42€}}$.
2. $0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
   Pour v_n : lorsque n tend vers $+\infty$, $-0,25n$ tend vers $-\infty$, donc $\mathrm{e}^{-0,25n}$ tend vers 0. Ainsi $525\mathrm{e}^{-0,25n}$ tend vers 0 également donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 270}$.
   Ainsi, à très long terme c'est $\boxed{\text{la première modélisation}}$ qui donne le prix de vente le plus bas.