

Exercice 1 - Tiré de BTS Informatique & Gestion, Juin 2006**Partie A****Étude théorique**

On se propose de déterminer les puissances successives de la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 , M^3 et M^4 . Établir une relation simple entre M^4 et M^3 .

On admet qu'il existe une suite numérique (a_n) telle que, pour tout $n \geq 3$, $M^n = a_n M^3$.

2. Préciser la valeur de a_3 et a_4 .

En utilisant l'égalité $M^{n+1} = M^n \times M$, montrer que la suite (a_n) est géométrique et donner sa raison.

3. En déduire, pour $n \geq 3$, l'expression de a_n en fonction de n .

4. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $M^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

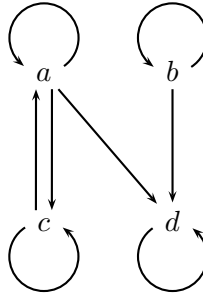
Partie B**Application**

Monsieur ROBERT, agent commercial de la coopérative « Le Val de Seille » pour le Centre-Est, prospecte les quatre villes Auxerre, Beaune, Châtillon et Dijon, notées A, B, C, D. Ses déplacements sont repérés par la matrice d'adjacence M définie dans la partie A.

1. Va-t-il directement d'Auxerre à Beaune ?
2. Recopier et compléter le graphe ci-contre correspondant à M . Ⓐ
3. Quel est le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à D ? En faire la liste. Ⓒ Ⓓ
4. À l'aide de la partie A, déterminer le nombre de chemins de longueur 8 de ce graphe. Ⓑ
Justifier votre réponse.

Exercice 2

On considère le graphe G suivant, composé de l'ensemble de sommets $V = \{a; b; c; d\}$:



On définit maintenant sur V la relation \mathcal{R} par :

$$x\mathcal{R}y \iff \text{il y a un arc allant de } x \text{ à } y \text{ dans } G.$$

1. La relation \mathcal{R} est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?
2. On veut rajouter un nombre minimum d'arcs dans G de manière à rendre \mathcal{R} symétrique. Quels arcs faut-il rajouter pour ce faire ?
Si l'on rajoute ces arcs dans G , \mathcal{R} devient-elle une relation d'équivalence ?
3. On reprend le graphe G initial. On veut supprimer un nombre minimum d'arcs dans G de manière à rendre \mathcal{R} antisymétrique. Quels arcs peut-on supprimer pour ce faire ?
Si l'on supprime ces arcs de G , \mathcal{R} devient-elle une relation d'ordre ?