

**Exercice 1 - Tiré de BTS Informatique & Gestion, Juin 2006****Partie A****Étude théorique**

On se propose de déterminer les puissances successives de la matrice  $M$  définie par  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $M^2$ ,  $M^3$  et  $M^4$ . Établir une relation simple entre  $M^4$  et  $M^3$ .

On admet qu'il existe une suite numérique  $(a_n)$  telle que, pour tout  $n \geq 3$ ,  $M^n = a_n M^3$ .

2. Préciser la valeur de  $a_3$  et  $a_4$ .

En utilisant l'égalité  $M^{n+1} = M^n \times M$ , montrer que la suite  $(a_n)$  est géométrique et donner sa raison.

3. En déduire, pour  $n \geq 3$ , l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .

4. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $M^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

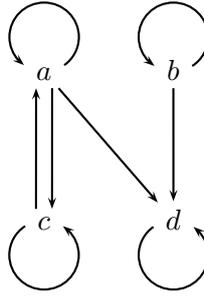
**Partie B****Application**

Monsieur ROBERT, agent commercial de la coopérative « Le Val de Seille » pour le Centre-Est, prospecte les quatre villes Auxerre, Beaune, Châtillon et Dijon, notées A, B, C, D. Ses déplacements sont repérés par la matrice d'adjacence  $M$  définie dans la partie A.

1. Va-t-il directement d'Auxerre à Beaune ?
2. Recopier et compléter le graphe ci-contre correspondant à  $M$ . Ⓐ
3. Quel est le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à D ? En faire la liste. Ⓒ                      Ⓓ
4. À l'aide de la partie A, déterminer le nombre de chemins de longueur 8 de ce graphe. Ⓑ  
Justifier votre réponse.

## Exercice 2

On considère le graphe  $G$  suivant, composé de l'ensemble de sommets  $V = \{a; b; c; d\}$  :



On définit maintenant sur  $V$  la relation  $\mathcal{R}$  par :

$$x\mathcal{R}y \iff \text{il y a un arc allant de } x \text{ à } y \text{ dans } G.$$

1. La relation  $\mathcal{R}$  est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ?
2. On veut rajouter un nombre minimum d'arcs dans  $G$  de manière à rendre  $\mathcal{R}$  symétrique. Quels arcs faut-il rajouter pour ce faire ?  
Si l'on rajoute ces arcs dans  $G$ ,  $\mathcal{R}$  devient-elle une relation d'équivalence ?
3. On reprend le graphe  $G$  initial. On veut supprimer un nombre minimum d'arcs dans  $G$  de manière à rendre  $\mathcal{R}$  antisymétrique. Quels arcs peut-on supprimer pour ce faire ?  
Si l'on supprime ces arcs de  $G$ ,  $\mathcal{R}$  devient-elle une relation d'ordre ?