## Exercice 1 - Tiré de BTS Informatique & Gestion, Juin 2006

### Partie A - Étude théorique

1. La calculatrice donne $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^4 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   On voit ainsi que $\boxed{M^4 = 2M^3}$.

2. Pour $n = 3$, on a clairement $M^3 = 1M^3$ donc $\boxed{a_3 = 1}$.

   Pour $n = 4$ on vient de voir que $\boxed{a_4 = 2}$.

   Utilisons maintenant l'égalité de l'énoncé pour $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M && \\ &&& \text{On remplace avec la suite } a \\ a_{n+1}M^3 &= a_n M^3 \times M && \\ &&& M^3 \times M = M^4 \\ a_{n+1}M^3 &= a_n M^4 && \\ &&& \text{On remplace d'après l'égalité de la question 1} \\ a_{n+1}M^3 &= a_n \times 2M^3 && \\ &&& a_n \times 2 = 2a_n \\ a_{n+1}M^3 &= 2a_n M^3 && \end{aligned}$$

   Ainsi on peut en déduire que pour tout $n \geq 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ est géométrique de raison } 2}$.

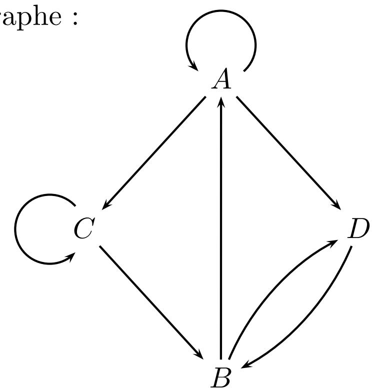
3. On connaît la raison 2 et le terme $a_3 = 1$ ; ainsi $a_3 = a_0 \times 2^3$ donc $1 = a_0 \times 8$ donc $a_0 = \dfrac{1}{8}$.

   On en déduit donc que $\boxed{a_n = a_0 \times 2^n = \dfrac{1}{8} \times 2^n}$.

4. On en déduit bien que $a_n = \dfrac{1}{2^3} \times 2^n = 2^{n-3}$ ce qui donne bien, pour $n \geq 3$, $M^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

### Partie B - Application

1. Dans la matrice, $M_{1,2} = 0$ donc $\boxed{\text{il ne va pas directement d'Auxerre à Beaune}}$.
2. Voici une représentation du graphe :




3. Pour avoir le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à D, on lit simplement : $\left(M^3\right)_{1,4} = \boxed{3}$. Ce sont les chemins suivants :
   - $A \to A \to A \to D$
   - $A \to D \to B \to D$
   - $A \to C \to B \to D$

4. Les nombres de chemins de longueur 8 de ce graphe sont dans la matrice $M^8$. Il suffit pour avoir le nombre total de faire la somme de tous les coefficients de cette matrice.

   D'après la partie A, $M^8 = 2^{8-3}\begin{pmatrix}3&3&3&3\\2&2&2&2\\2&2&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix} = 32\begin{pmatrix}3&3&3&3\\2&2&2&2\\2&2&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

   Il y a donc en tout $32 \times (3+3+3+3+2+2+2+2+2+2+2+2+1+1+1+1) = \boxed{1\ 024}$ chemins de longueur 8 dans le graphe.

**Exercice 2**

1. $\boxed{\mathcal{R} \text{ est réflexive}}$ car on a bien pour tout sommet $x$ de $V, x\mathcal{R}x$ puisqu'il y a bien les 4 boucles dans le graphe.

   $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas symétrique}}$ : on peut voir par ex. que $a\mathcal{R}d$ mais $d\not\mathcal{R}a$.

   $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas antisymétrique}}$ : on peut voir par ex. que $a\mathcal{R}c$ et $c\mathcal{R}a$ alors que $a \neq c$.

   $\boxed{\mathcal{R} \text{ n'est pas transitive}}$ : on peut voir par ex. que $c\mathcal{R}a$ et $a\mathcal{R}d$ alors que $c\not\mathcal{R}d$.

2. Pour rendre $\mathcal{R}$ symétrique, $\boxed{\text{il faut rajouter } d \to a \text{ et } d \to b}$.

   Si l'on rajoute ces arcs dans G, $\boxed{\mathcal{R} \text{ ne sera pas une relation d'équivalence}}$ (on a toujours le même contre-exemple pour la transitivité).

3. Pour rendre $\mathcal{R}$ antisymétrique, il faut supprimer un arc entre $a$ et $c$ : on peut supprimer $\boxed{\text{soit } a \to c \text{ soit } c \to a}$.

   Si l'on a supprimé $a \to c$, $\mathcal{R}$ ne devient pas une relation d'ordre (on a le même contre-exemple pour la transitivité), en revanche si on a suppimé $c \to a$, $\mathcal{R}$ devient une relation d'ordre car elle devient bien réflexive, antisymétrique et transitive.