Lycée Blaise Pascal **Lundi 31 mars 2014**

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 1 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.
5. On admet qu'on peut utiliser une fonction *random*() qui renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
   Ecrire un algorithme utilisant cette fonction qui permet de simuler le tirage au hasard d'un cube de l'urne. L'algorithme affichera la couleur du cube tiré ainsi que la figure géométrique inscrite sur les faces du cube tiré.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = -2 + \mathrm{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et placer les points C et C′ dans le repère donné en annexe.
   (b) Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D$'$ par la transformation f.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

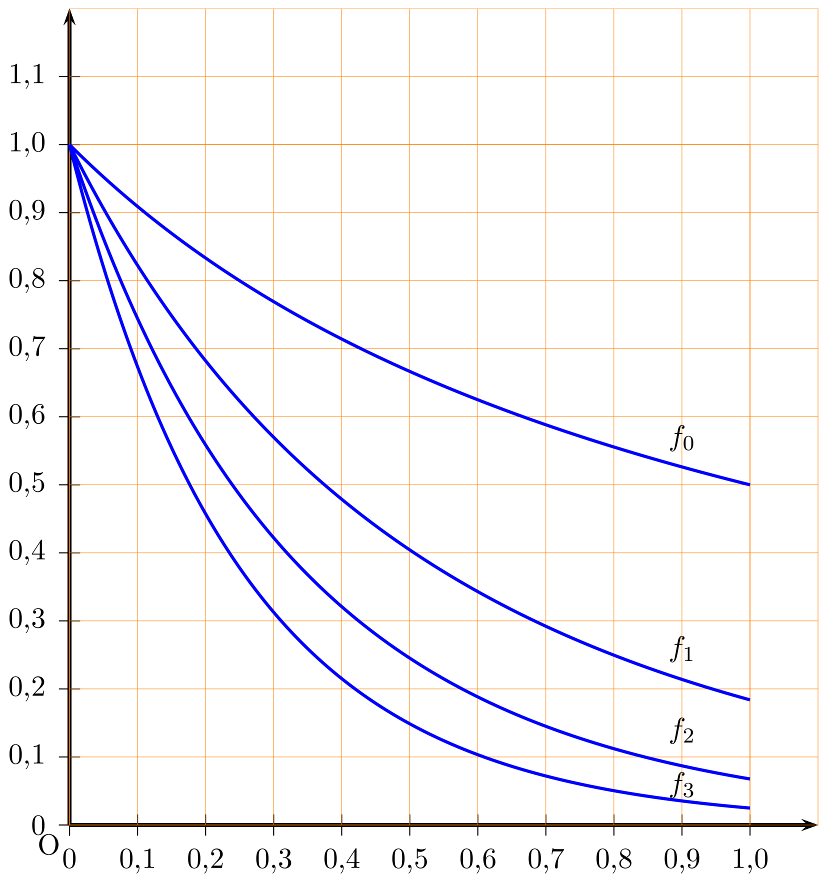
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

De plus on définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n pour différentes valeurs de n :



 (a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

 (b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leq \mathrm{e}^{-nx}.$$

 (b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction h_n sur $[0\,;\,1]$ par $h_n(x) = -\dfrac{1}{n}f_n(x)$.

 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $h_n'(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{n}g_n(x)$.

 (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right)$.

 (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 2