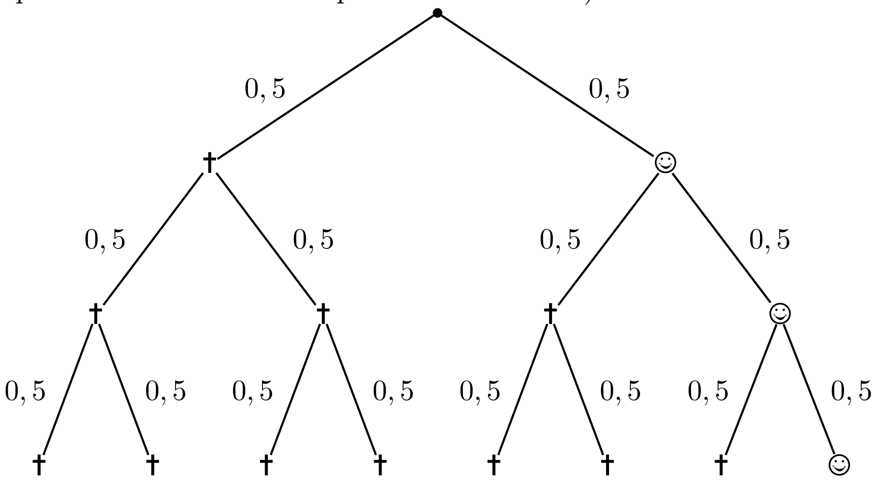
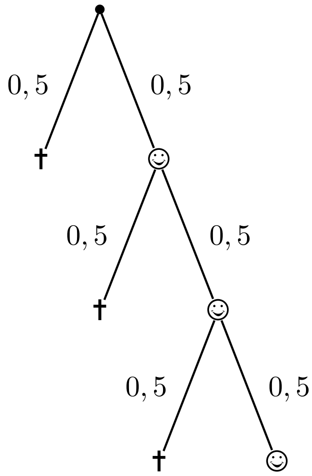
Exercice 1 - Le chat de Schrödinger

1. Quand on active le bouton, de deux choses l'une : soit le chat meurt (cela avec une probabilité de $0,5$) soit il ne se passe rien de particulier (donc le chat est encore vivant). Ce dernier évènement est donc le contraire du premier, donc sa probabilité vaut $1-0,5=0,5$ là également.
   $\boxed{\text{La probabilité que le chat soit vivant après une unique activation du bouton est de } 0,5.}$
2. Sachant qu'il était vivant juste après la première activation, il a une probabilité de $0,5$ de succomber à la seconde activation. Ainsi la probabilité que le chat soit mort après deux activations du bouton sachant qu'il était vivant juste après la première activation est de $\boxed{0,5}$.
3. On peut consigner ces résultats dans un arbre de probabilités à deux étages pour voir que la probabilité qu'au bout de 2 activations que le chat soit encore vivant est de $\dfrac{1}{4}$. Pour 3 activations, c'est le même principe : c'est $\dfrac{1}{8}$ (<u>Remarque :</u> on peut arrêter l'arbre à chaque embranchement où le chat meurt, puisqu'il ne pourra pas ressusciter : c'est ce qu'on a fait à droite).





…et au bout de n activations, elle est de $\dfrac{1}{2^n}$ (résultat que l'on peut démontrer par récurrence sur n pour être vraiment précis, ou bien en détaillant l'arbre sur n étages). On veut que la probabilité que le chat soit mort soit plus grande que $99,99\%$, ce qui correspond à avoir la probabilité que le chat soit vivant plus petite que $0,01\%$ soit donc l'inégalité suivante à résoudre :
$\dfrac{1}{2^n} \leq 0,0001$. On ne sait pas encore résoudre directement ce genre d'inéquations (on verra les fonctions logarithmes par la suite comme déjà annoncé), donc pour l'instant on ne sait faire cela qu'à la calculatrice :
Pour $n=13$, cela donne $0,00012$ environ, et pour $n=14$ cela donne $0,00006$ environ.
C'est donc $\boxed{\text{au bout de 14 activations}}$ qu'on est certain à plus de $99,99\%$ que le chat soit mort.

Exercice 2 : Nouvelle-Calédonie, Novembre 2005

1. On connaît $\mathrm{AB}=4$. Dans le triangle rectangle ABD, $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$.

   On peut donc écrire que $\cos\theta = \dfrac{4}{\mathrm{AD}}$ soit $\boxed{\mathrm{AD}=\dfrac{4}{\cos\theta}}$.

   Pour exprimer CD en fonction de θ, on écrit que $\mathrm{CD}=\mathrm{CB}+\mathrm{BD}$. On connaît alors $\mathrm{CB}=7$, et dans le triangle rectangle ABD, $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{4}$ soit $\mathrm{BD}=4\tan\theta$. Ainsi $\boxed{\mathrm{CD}=7+4\tan\theta}$.

   Le lapin traverse à la vitesse de 30km/h, soit $30\times\dfrac{1000}{3600}\text{m/s} = \dfrac{25}{3}\text{m/s}$. Ainsi pour parcourir la distance AD, il va mettre un temps t_1 (en secondes) égal à $\dfrac{\mathrm{AD}}{\frac{25}{3}} = \dfrac{\frac{4}{\cos\theta}}{\frac{25}{3}} = \boxed{\dfrac{4}{\cos\theta}\times\dfrac{3}{25}}$.

Le camion avance à la vitesse de 60km/h soit $\frac{50}{3}$m/s. Ainsi pour parcourir la distance CD il va mettre un temps $t_2 = \frac{\text{CD}}{\frac{50}{3}} = \frac{7+4\tan\theta}{\frac{50}{3}} = \boxed{(7+4\tan\theta)\times\frac{3}{50}}$.

2. Le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si :

$$\begin{aligned}
t_1 &< t_2 && \text{On remplace par les valeurs}\\
\frac{4}{\cos\theta}\times\frac{3}{25} &< (7+4\tan\theta)\times\frac{3}{50} && \times\frac{25}{3}\\
\frac{4}{\cos\theta} &< (7+4\tan\theta)\times\frac{1}{2} && \text{On développe à droite}\\
\frac{4}{\cos\theta} &< \frac{7}{2}+2\tan\theta && \text{On regroupe tout dans le membre de droite}\\
0 &< \frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

3. Pour savoir où la fonction f est strictement positive, étudions-la sur l'intervalle $I = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$:

f est dérivable sur I, car cos y est dérivable et ne s'y annule pas, et que tan y est dérivable.

$\forall\theta\in I, f'(\theta) = 0 + 2\times\frac{1}{\cos^2\theta} - 4\times\frac{-1\times(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2-4\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2(1-2\sin\theta)}{\cos^2\theta}$.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Sgn. $1-2\sin\theta$		$+$	0	$-$	
Sgn. $\frac{2}{\cos^2\theta}$		$+$		$+$	
Sgn. $f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
Var. f	$-0,5$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}-\frac{6}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

Afin d'étudier le signe de f', il faut étudier le signe de g : $\theta\mapsto 1-2\sin\theta$. La fonction sinus est strictement croissante sur I, donc cette fonction est strictement décroissante sur I. On peut s'en assurer en calculant $g'(\theta) = -2\cos\theta$ qui est bien négatif sur I.

g s'annule lorsque $\sin\theta = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire, pour $\theta\in I$, lorsque $\theta = \frac{\pi}{6}$. Puisque g est strictement décroissante, elle est donc strictement positive avant, strictement négative après, d'où le tableau de variations ci-contre.

Or $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2}-\frac{6}{\sqrt{3}} \approx 0,036 > 0$.

Ainsi $\boxed{\text{le lapin peut traverser}}$ avant le passage du camion, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ par exemple.

On pouvait bien sûr s'arrêter là, on a conclu : le lapin peut traverser. Ouf! Cela dit, voici une méthode pour arriver au bout de la résolution. Car il peut être intéressant de se demander où diable la fonction f s'annule-t-elle réellement. Pour cela, il faut résoudre l'équation $\frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta} = 0$

Soit, en multipliant le tout par $2\cos\theta$, l'équation $7\cos\theta + 4sin\theta - 8 = 0$

Effectuons le changement de variable $X = \cos\theta$. Puisque $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$, on a alors $\sin^2\theta = 1-X^2$.

Comme $\theta\in\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\theta\geq 0$ et c'est donc équivalent sur cet intervalle à $\sin\theta = \sqrt{1-X^2}$. On aboutit ainsi à l'équation :

$$\begin{aligned}
7X+4\sqrt{1-X^2}-8 &= 0 && \text{On isole la racine}\\
4\sqrt{1-X^2} &= 8-7X && \text{On élève au carré}\\
16(1-X^2) &= 64+49X^2-112X && \text{On développe}\\
16-16X^2 &= 64+49X^2-112X && \text{On regroupe}\\
0 &= 48+65X^2-112X
\end{aligned}$$

$\Delta = 64$ donc les solutions sont $X = \frac{112\pm 8}{130}$ c'est-à-dire $\frac{12}{13}$ et $\frac{4}{5}$.

Ainsi on sait que sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, $\cos\theta = X \iff \theta = Arccos(X)$ donc on a trouvé les deux solutions $\theta = Arccos\left(\frac{4}{5}\right)\approx 37^\circ$ et $\theta = Arccos\left(\frac{12}{13}\right)\approx 23^\circ$.

Donc $\forall\theta\in\left]Arccos\left(\frac{4}{5}\right)\ ;\ Arccos\left(\frac{12}{13}\right)\right[$, le lapin traverse sans percuter le camion.