Partie A

1. Pour étudier la parité de f, il faut d'abord que D_f soit symétrique par rapport à 0. C'est le cas, car f est définie sur $\mathbb{R}$. Il faut alors prendre $x \in D_f$ et regarder $f(-x)$: si cela vaut $f(x)$ la fonction est paire, si cela vaut $-f(x)$ la fonction est impaire, et si ce n'est ni l'un ni l'autre, la fonction n'est ni paire ni impaire.
   Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = f(x)$.
   Ainsi $\boxed{f \text{ est paire}}$. On peut en déduire que $\boxed{\Gamma \text{ est symétrique par rapport à } (Oy)}$.
2. Soit $x \geq 0$. On a donc $-x \leq 0 \leq x$. Puisque exp est croissante, on en déduit donc $\mathrm{e}^{-x} \leq e^0 \leq \mathrm{e}^x$.
3. (a) $\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} & = & 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$et par inverse, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$.
   On a montré à la question 2 que pour $x \geq 0$, $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x \leq 0$, ainsi $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0;+\infty[}$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   (a) Soit $x \geq 0$. D'après la question 2 et puisque l'exponentielle est toujours positive :
   $$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \mathrm{e}^{-x} & \leq & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \leq & \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x & \leq & 2\mathrm{e}^x \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} & \geq & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x} & \geq & \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x} \\ g(x) & \geq & f(x) & \geq & h(x) \end{array}$$
   $+\mathrm{e}^x$
   On passe à l'inverse (tout est positif)
   On reconnaît les fonctions

   (b) On peut en déduire que, sur $[0;+\infty[$, $\boxed{\Gamma_1 \text{ est au-dessus de } \Gamma \text{ qui est au-dessus de } \Gamma_2}$.
   Pour le tracé, la tangente à Γ au point d'abscisse 0 est $\boxed{\text{horizontale}}$ puisque $f'(0) = 0$.

Partie B

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f$ est une fonction continue sur $[n; n+1]$ donc I_n existe. Puisque de plus f est positive, I_n se traduit comme l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, Γ, ainsi que les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$.
2. (a) On a vu en A)3)b) que f est décroissante sur $[0;+\infty[$, donc pour tout entier naturel n :
   $\forall x \in [n; n+1], f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$
   Il vient en intégrant cette inégalité sur $[n; n+1]$ que :
   $(n+1-n)f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq (n+1-n)f(n)$
   Soit exactement ce que l'on voulait démontrer car $n+1-n = 1$.

   (b) La propriété au rang n nous dit que $f(n+1) \leq I_n$ et la propriété au rang $n+1$ que $I_{n+1} \leq f(n+1)$, il vient ainsi que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

   (c) Puisque f est positive, I_n s'interprète comme une aire et est donc toujours positive. Ainsi la suite (I_n) est décroissante et minorée donc convergente.
   En reprenant l'inégalité $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq f(n)$, il vient avec le théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Partie C

1. On a montré en A)4)a) que pour $x \geq 0$: $\dfrac{1}{2\mathrm{e}^x} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   En intégrant cette inégalité sur $[0;n]$, il vient :
   $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \leq \int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \leq \int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$
   Or $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^n = -\mathrm{e}^{-n} - (-\mathrm{e}^{-0}) = 1 - \mathrm{e}^{-n}$ (qui est inférieur à 1 car l'exponentielle est toujours positive).
   De même $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{2\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-n})$.
   On a bien démontré l'inégalité demandée.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, J_n est également interprétable en terme d'aire, puisque c'est l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, Γ, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$. Forcément, quand la surface s'agrandit, l'aire augmente ! Ainsi (J_n) est croissante.
   On vient de démontrer que (J_n) est croissante, et on a démontré à la question 1 qu'elle était majorée par 1, ainsi elle converge.

3. La limite de $\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-n})$ est $\dfrac{1}{2}$, ainsi d'après le théorème admis, il vient que $\boxed{\dfrac{1}{2} \leq L \leq 1}$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}$.
   (b) Puisque f est la dérivée de la fonction $x \mapsto v(\mathrm{e}^x)$, alors cette fonction est une primitive de f.
   Ainsi $J_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = [v(\mathrm{e}^x)]_0^n = v(\mathrm{e}^n) - v\left(\mathrm{e}^0\right) = v(\mathrm{e}^n) - v(1) = v(\mathrm{e}^n) - \frac{\pi}{4}$.
   Or on sait que C_v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$ d'où il vient que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} v(\mathrm{e}^x) = \frac{\pi}{2}$.
   Par soustraction, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Donc $\boxed{L = \dfrac{\pi}{4}}$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie