Exercice 0 - Restitution Organisée de Connaissances

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ; nous appelerons } S_n = \sum_{i=1}^{n} i.$$

<u>Démonstration 1 :</u> calculons $2S_n$, en faisant la somme dans les deux sens.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & S_n & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & \text{n-1} & + & \text{n} \\ + & S_n & = & \text{n} & + & \text{n-1} & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S_n & = & \text{n+1} & + & \text{n+1} & + & \ldots & + & \text{n+1} & + & \text{n+1} \end{array}$$

Ainsi $2S_n$ est la somme de n termes qui valent chacun $n+1$ donc $2S_n = n(n+1)$, d'où la formule.$\square$

<u>Démonstration 2 :</u> (par récurrence) posons $P(n)$: « $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i = 1$; le membre de droite vaut $\dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. On a bien égalité, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) && \\ &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) && \text{On coupe la somme en 2 pour faire apparaître } \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{On utilise l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && \text{On met sur le même dénominateur} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && \text{On regroupe les fractions} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{On factorise} \end{aligned}$$

Conclusion : On vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 1 - Le sommeil d'Ernest Darling

Si tous les dix ans, Ernest Darling dort une heure de moins et qu'à 100 ans il ne lui reste plus aucune heure de sommeil, on en déduit qu'à 90 ans (100 - 10), il dormira une heure de plus, soit 1 heure, qu'à 80 ans (90 - 10), il dormira une heure de plus, soit 2 heures, etc. La suite des âges où il change son sommeil et celle des heures de sommeil sont des suites arithmétiques.

On présente dans un tableau les termes de même rang de ces deux suites :

Age	100	90	80	70	60	50	40	30
Nombre d'heures de sommeil	0	1	2	3	4	5	6	7

On voit donc qu' $\boxed{\text{Ernest Darling a 30 ans au moment de la conversation}}$.

On pouvait également utiliser les suites arithmétiques, et appeler u_n le nombre d'heures de sommeil d'Ernest Darling à l'âge de $10n$ années. On sait que cette suite est arithmétique de raison -1 et que $u_{10} = 0$. On cherche le p pour lequel $u_p = 7$.

$u_{10} = u_p + (10 - p) \times raison$ d'où $0 = 7 + (10 - p) \times (-1)$ d'où $p = 3$ et donc l'âge de 30 ans.

Exercice 2 - De la variation à un encadrement.

1. (a) Pour les variations de f, on étudie le signe de f'. Dans $f(x)$, on reconnaît la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & 3x^2 + 1 \\ v(x) & = & x^2 + 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 6x \\ v'(x) & = & 2x \end{array}\right.$$

Puisque $x \mapsto x^2 + 3$ ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, f'(x) = \dfrac{6x \times (x^2+3) - (3x^2+1) \times 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{6x^3 + 18x - 6x^3 - 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{16x}{(x^2+3)^2}$.

x	0		$+\infty$
sgn. $16x$	0	$+$	
sgn. $(x^2+3)^2$		$+$	
sgn. $f'(x)$	0	$+$	
var. f	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[}$.

(b) La suite u est définie par $u(n) = f(n)$ donc a les mêmes variations que f.
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

2. (a) Etudions le signe de $u_n - 3$ comme nous le propose l'énoncé :
$u_n - 3 = \dfrac{3n^2+1}{n^2+3} - 3 = \dfrac{3n^2+1}{n^2+3} - \dfrac{3(n^2+3)}{n^2+3} = \dfrac{3n^2+1-3(n^2+3)}{n^2+3} = \dfrac{3n^2+1-3n^2-9}{n^2+3} = \dfrac{-8}{n^2+3}$.
Le numérateur est stricteent négatif, quant au dénominateur, il s'agit de la somme du carré d'un nombre entier (donc positif) et d'un nombre strictement positif, il est donc strictement positif. Ainsi, cette quantité est strictement négative.

On a bien démontré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 < 0$, ce qui est équivalent à démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3$.

(b) Rentrons l'expression $Y1 = (3X \wedge 2 + 1)/(X \wedge 2 + 3)$ dans la calculatrice, et regardons dans le tableau de valeurs un entier N pour lequel u_N dépasse $2,9999$. Quand on met un pas de 1 en 1, on s'aperçoit que les valeurs mettent beaucoup de temps à dépasser $2,9999$. On peut élargir le pas (mettre 10 par exemple) pour s'apercevoir que u_{283} dépasse $2,9999$.

Puisque toutes les valeurs de la suite u sont strictement inférieures à 3 (question 2)a.) et que la suite u est croissante (question 1.), on en déduit que $\boxed{\forall n \geq 283, u_n \in]2,9999; 3[}$.

Exercice 3 - Algorithme

Dans cet algorithme, la variable n compte le nombre de rebonds que fait la balle, et h représente la hauteur de la balle après n rebonds, en cm.

Algorithme de l'exercice 3 du DM1.

```
Variables :
n est un nombre entier.
h est un nombre réel.

Corps de l'algorithme :
h prend la valeur 200
n prend la valeur 0
Tant que h ≥ 10
    n prend la valeur n + 1
    h prend la valeur h × 0,9
Fin_Bloc_Tant_Que
Afficher le message "La balle aura un rebond inférieur à 10cm au bout de "
Afficher la variable n
Afficher le message " rebonds."
```

Il faut simplement effectuer les rebonds tant que la hauteur est trop grande ; étant donné qu'à chaque rebond la hauteur est diminuée de 10%, cela revient à multiplier la hauteur par $0,9$, car $h - 10\%h = h - 0,1h = 0,9h$.

En faisant tourner l'algorithme sous Algobox, ou en effectuant les calculs à la main, on se rendait compte que c'est le cas au bout de $\boxed{\text{29 rebonds}}$.