1. (a) Pour étudier les extremums de la fonction f, étudions le signe de sa dérivée. $f'(x) = 3x^2 + p$.
   - Lorsque $p > 0$, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - Lorsque $p = 0$, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où elle s'annule. Ainsi f' est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule qu'une seule fois (donc un nombre fini), donc f y est strictement croissante.

   Dans les deux cas, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc n'a donc aucun extremum local.

   (b) Lorsque $p < 0$, f' change de signe. Effectivement $f'(x)$ est un trinôme du second degré ; calculons son discriminant.

   $\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times p = -12p > 0$.

   Il y a donc deux racines au trinôme, $x_\pm = \frac{0 \pm \sqrt{\Delta}}{2\times 3} = \pm\frac{\sqrt{-12p}}{6} = \pm\frac{\sqrt{4\times(-3p)}}{6} = \pm\frac{2\sqrt{-3p}}{6} = \pm\frac{\sqrt{-3p}}{3}$.

   On a alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var. f	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

   Il est donc clair que $m = f(x_+) = f(\frac{\sqrt{-3p}}{3})$ et $M = f(x_-) = f(-\frac{\sqrt{-3p}}{3})$.

$$
\begin{aligned}
m \times M &= [(\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 + p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3} + q][(-\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 + p \times (-\tfrac{\sqrt{-3p}}{3}) + q] \\
&= [(\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 + p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3} + q][-(\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 - p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3} + q] && \text{On fait apparaître } (a+b)(a-b) \\
&= [q + ((\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 + p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3})][q - ((\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 + p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3})] \\
&= q^2 - [(\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 + p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3}]^2 && (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\
&= q^2 - [((\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3)^2 + (p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^2 + 2 \times (\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 \times p \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3}] && (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
&= q^2 - [(\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^6 + p^2 \times (\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^2 + 2p \times (\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^3 \times \tfrac{\sqrt{-3p}}{3}] \\
&= q^2 - [\tfrac{(-3p)^3}{3^6} + p^2 \times \tfrac{-3p}{9} + 2p \times (\tfrac{\sqrt{-3p}}{3})^4] \\
&= q^2 - [\tfrac{-3^3 \times p^3}{729} + p^2 \times \tfrac{-3p}{9} + 2p \times \tfrac{(-3p)^2}{3^4}] \\
&= q^2 - [\tfrac{-p^3}{27} + \tfrac{-p^3}{3} + \tfrac{18p^3}{81}] \\
&= q^2 - [\tfrac{-p^3}{27} + \tfrac{-p^3}{3} + \tfrac{2p^3}{9}] \\
&= q^2 + \tfrac{p^3}{27} + \tfrac{p^3}{3} - \tfrac{2p^3}{9} \\
&= q^2 + \tfrac{p^3}{27} + \tfrac{9p^3}{27} - \tfrac{6p^3}{27} \\
&= q^2 + \tfrac{4p^3}{27}
\end{aligned}
$$

2. (a)
   - Si $m < M < 0$:

     f est strictement croissante sur $]-\infty; x_-]$ donc $\forall x \in]-\infty; x_-], f(x) \leq f(x_-) < 0$.

     f est strictement décroissante sur $[x_-; x_+]$ donc $\forall x \in [x_-; x_+], f(x) \leq f(x_-) < 0$.

     f est strictement croissante sur $[x_+; +\infty[$ et $f(x_+) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty (> 0)$ donc il existe un unique x dans $]x_+; +\infty[$ tel que $f(x) = 0$.

     Au final, il n'y a qu'une unique solution pour E sur $\mathbb{R}$.

     Si $0 < m < M$: toujours d'après le tableau de variations et selon le même raisonnement, l'équation E a une unique solution qui est cette fois dans $]-\infty; x_-[$
   - Si $m = 0$: toujours d'après le tableau de variations et selon le même raisonnement, il y a une solution de E dans $]-\infty; x_-[$ et l'autre solution est x_+.

     Si $M = 0$, il y a une solution qui est x_- et l'autre qui est dans $]x_+; +\infty[$.
   - Si $m < 0 < M$, dans chacun des trois intervalles la fonction est strictement monotone, valant à une extrémité une quantité strictement négative et à l'autre une quantité strictement positive donc il y a une solution dans chacun des intervalles donc trois solutions en tout.

(b) On vient donc de voir qu'il y a trois solution réelles ssi on a $m < 0 < M$, c'est à dire ssi $m \times M < 0$. En utilisant la quesiton 1. cela revient à $q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$, et en multipliant le tout par 27 on retrouve exactement $4p^3 + 27q^2 < 0$.

(c)
- $x^3 + 2x - 5 = 0$: $p = 2$; $q = -5$. $4p^3 + 27q^2 = 707$. $\boxed{\text{Une seule solution}}$.
- $x^3 - 3x + 3 = 0$: $p = -3$; $q = 3$. $4p^3 + 27q^2 = 135$. $\boxed{\text{Une seule solution}}$.
- $x^3 - 3x + 2 = 0$: $p = -3$; $q = 2$. $4p^3 + 27q^2 = 0$. $\boxed{\text{Deux solutions}}$.
- $x^3 - 3x + 1 = 0$: $p = -3$; $q = 1$. $4p^3 + 27q^2 = -81$. $\boxed{\text{Trois solutions}}$.

3. (a) On remplace dans l'équation x par $X - \frac{b}{3}$, cela donne : $(X - \frac{b}{3})^3 + b(X - \frac{b}{3})^2 + c(X - \frac{b}{3}) + d = 0$.
Développons pour voir qu'il ne reste aucun X^2 après ce changement d'inconnue.
$(X - \frac{b}{3})^2 \times (X - \frac{b}{3}) + b(X - \frac{b}{3})^2 + cX - c\frac{b}{3} + d = 0$

$(X^2 - 2X\frac{b}{3} + (\frac{b}{3})^2) \times (X - \frac{b}{3}) + b(X^2 - 2X\frac{b}{3} + (\frac{b}{3})^2) + cX - c\frac{b}{3} + d = 0$

$X^3 - X^2\frac{b}{3} - 2X^2\frac{b}{3} + 2X(\frac{b}{3})^2 + X(\frac{b}{3})^2 - (\frac{b}{3})^3 + bX^2 - 2bX\frac{b}{3} + b(\frac{b}{3})^2 + cX - c\frac{b}{3} + d = 0$

$X^3 + X^2[-\frac{b}{3} - 2\frac{b}{3} + b] + X[2(\frac{b}{3})^2 + (\frac{b}{3})^2 - 2b\frac{b}{3} + c] - (\frac{b}{3})^3 + b(\frac{b}{3})^2 - c\frac{b}{3} + d = 0$

$X^3 + X[-\frac{b^2}{3} + c] + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0$

On voit bien qu'il n'y a pas de terme en X^2.

(b) On vient de se ramener au cas précédent avec $\boxed{p = c - \frac{b^2}{3}}$ et $\boxed{q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d}$.
- $x^3 - x^2 + 2x - 7 = 0$
  $b = -1$; $c = 2$; $d = -7$
  $p = \frac{5}{3}$; $q = \frac{-173}{27}$. $4p^3 + 27q^2 = 1127$
  $\boxed{\text{Une seule solution}}$.
- $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0$
  $b = -5$; $c = 3$; $d = 9$
  $p = \frac{-16}{3}$; $q = \frac{128}{27}$. $4p^3 + 27q^2 = 0$
  $\boxed{\text{Deux solutions}}$.
- $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$
  $b = 1$; $c = -17$; $d = 15$
  $p = \frac{-52}{3}$; $q = \frac{560}{27}$. $4p^3 + 27q^2 = -9216$
  $\boxed{\text{Trois solutions}}$.