Exercice n°1

1. On est très tentés dans cet exercice de reconnaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison i et de premier terme 1, et donc d'écrire :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{10} i^k = \text{premier terme} \times \frac{1-i^{\text{nombre de termes}}}{1-i} = 1 \times \frac{1-i^{11}}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$
De même $\displaystyle\sum_{k=0}^{11} i^k = \frac{1-i^{12}}{1-i} = \frac{1-1}{1-i} = 0.$
De même $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} i^k = \frac{1-i^{13}}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1.$
De même $\displaystyle\sum_{k=0}^{13} i^k = \frac{1-i^{14}}{1-i} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i.$
Il se trouve qu'au programme de terminale S, seules les suites *réelles* sont au programme. Tous les théorèmes ne sont donc utilisables qu'avec des réels, et on ne peut donc pas appliquer la méthode puisqu'ici on utilise une raison complexe (mais cette méthode est justifiable à plus haut niveau)
Il suffit alors d'effectuer les calculs à la main, en écrivant à chaque fois combien vaut chaque puissance de i.
2. Regardons maintenant les différentes valeurs des i^n avant de calculer la grande somme.
   - Si n est un multiple de 4, $i^n = 1$ (démonstration par récurrence sur k en posant $n = 4k$, exposée ensuite)
   - Si n vaut 1 + un multiple de 4, $i^n = i$ (se déduit du point précédent puisque $i^{4k+1} = i^{4k} \times i = i$)
   - Si n vaut 2 + un multiple de 4, $i^n = -1$ (se déduit du point précédent de la même manière)
   - Si n vaut 3 + un multiple de 4, $i^n = -i$ (se déduit du point précédent de la même manière)

   Propriété à démontrer : $P(k)$: « $i^{4k} = 1$ »
   Initialisation : Pour $k = 0$, $i^{4\times 0} = i^0 = 1$.
   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(k)$ vraie et démontrons $P(k+1)$.
   $i^{4(k+1)} = i^{4k+4} = i^{4k} \times i^4 = 1 \times 1 = 1.$
   Conclusion : On vient de démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}, i^{4k} = 1$

   On remarque ensuite que pour tout n, $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$. Effectivement on a 4 puissances successives de i, donc chaque exposant est dans l'un des cas précédents, et chacun des 4 cas se retrouvent dans les 4 exposants. Ainsi la somme des 4 puissances est égale à $1 + i - 1 - i = 0$

   Pour revenir à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k$, qui est une somme de (n+1) termes :
   - lorsque n vaut 3 + un multiple de 4, la somme vaut 0 (dans ce cas là, le nombre total de termes est un multiple de 4, donc on regroupe les termes 4 par 4 à la suite, et on ne fait que des sommes de 0)
   - lorsque n est multiple de 4 elle vaut 1
   - lorsque n vaut 1 + un multiple de 4, elle vaut $1+i$
   - lorsque n vaut 2 + un multiple de 4, elle vaut i

Exercice n°2

Dans tout l'exercice, on notera $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. (a) Nous voulons que $\dfrac{z}{1+2i} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que sa partie imaginaire soit nulle. On va donc travailler avec la forme algébrique de ce nombre, en utilisant donc la forme algébrique de z.
$\dfrac{z}{1+2i} = \dfrac{(a+ib)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{a-2ia+ib-2bi^2}{1^2+2^2} = \dfrac{(a+2b)+i(b-2a)}{5}.$
Ainsi $\dfrac{z}{1+2i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{(b-2a)}{5} = 0 \Leftrightarrow b - 2a = 0.$
Les nombres complexes qui vérifient la propriété sont donc ceux qui s'écrivent $a + ib$ avec $b - 2a = 0$, c'est-à-dire ceux qui s'écrivent $a + 2ia$. Le nombre complexe $1 + 2i$ en est donc un exemple (avec $a = 1$), et on obtient clairement n'importe quelle autre solution en multipliant ce nombre par un nombre réel quelconque (puisque la solution générique s'écrit $a(1 + 2i)$). En notation comme on l'a déjà vue en cours, l'ensemble des solutions est $\boxed{(1+2i)\mathbb{R}}$.

(b) Cette fois-ci on veut que $\frac{z}{1+2i}$ soit un imaginaire pur (ce qui peut s'écrire $\frac{z}{1+2i} \in i\mathbb{R}$). C'est équivalent au fait que sa partie réelle soit nulle, donc avec les mêmes calculs qu'en a) on trouve $a + 2b = 0$.

Les nombres complexes qui vérifient la propriété sont donc ceux qui s'écrivent $a + ib$ avec $a + 2b = 0$, c'est à dire ceux qui s'écrivent $-2b + ib$. Le nombre complexe $-2 + i$ en est donc un exemple (avec $b = 1$), et on obtient clairement n'importe quelle autre solution en multipliant ce nombre par un nombre réel quelconque (puisque la solution générique s'écrit $b(-2+i)$). En notation comme on l'a déjà vue en cours, l'ensemble des solutions est $\boxed{(-2+i)\mathbb{R}}$.

2. (a) Le complexe $z = a + ib$ est l'affixe du point $M(a; b)$. On cherche donc les points $(a; b)$ du plan vérifiant $b - 2a = 0$. Si l'on préfère noter $(x; y)$ les coordonnées du point M, on cherche donc les points M du plan vérifiant $y = 2x$. C'est donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 2x}$.

(b) Le complexe $z = a + ib$ est l'affixe du point $M(a; b)$. On cherche donc les points $(a; b)$ du plan vérifiant $2b + a = 0$. Si l'on préfère noter $(x; y)$ les coordonnées du point M, on cherche donc les points M du plan vérifiant $2y = -x$. C'est donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -\frac{1}{2}x}$.

Exercice n°3

$$\begin{aligned}
P(1) &= 1^3 - (4-i) \times 1^2 + 2(13+2i) \times 1 - 23 - 5i \\
&= 1 - (4-i) + 2(13+2i) - 23 - 5i \\
&= 1 - 4 + i + 26 + 4i - 23 - 5i \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(i) &= i^3 - (4-i)i^2 + 2(13+2i)i - 23 - 5i \\
&= -i + (4-i) + 2i(13+2i) - 23 - 5i \\
&= -i + 4 - i + 26i - 4 - 23 - 5i \\
&= \boxed{-23 + 19i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(-i) &= (-i)^3 - (4-i)(-i)^2 + 2(13+2i)(-i) - 23 - 5i \\
&= i + (4-i) - 2i(13+2i) - 23 - 5i \\
&= i + 4 - i - 26i + 4 - 23 - 5i \\
&= \boxed{-15 - 31i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(2-i) &= (2-i)^3 - (4-i)(2-i)^2 + 2(13+2i)(2-i) - 23 - 5i \\
&= (2^3 + 3 \times 2^2 \times (-i) + 3 \times 2 \times (-i)^2 + (-i)^3) - (4-i)(2^2 - 2 \times 2 \times i + i^2) + (13+2i)(4-2i) - 23 - 5i \\
&= 8 - 12i - 6 + i - (4-i)(4 - 4i - 1) + [52 - 26i + 8i + 4] - 23 - 5i \\
&= 2 - 11i - (4-i)(3-4i) + [56 - 18i] - 23 - 5i \\
&= 2 - 11i - [12 - 16i - 3i - 4] + 56 - 18i - 23 - 5i \\
&= 2 - 11i - [8 - 19i] + 33 - 23i \\
&= 2 - 11i - 8 + 19i + 33 - 23i \\
&= \boxed{27 - 15i}
\end{aligned}$$