Exercice 4

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ associée au système vaut $\lambda^3 + 2 - 3\lambda$ (hors programme pour une matrice 3×3). En traçant une représentation graphique de la fonction, on voit néanmoins que 1 et -2 sont deux racines, ce qui veut dire qu'on peut écrire $\lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(a\lambda + b)$ (c'est comme en seconde avec la factorisation des polynômes du second degré).

Pour trouver a et b on identifie les coefficients en λ^3, λ^2, λ et 1 de chaque côté de l'égalité (après avoir développé le membre de droite). Cela donne $a = 1$ et $b = -1$, donc $\lambda^3 + 2 - 3\lambda = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ (on dit que 1 est une racine double). Il y a deux valeurs qui donne un déterminant nul : $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$, pour les autres valeurs la matrice est inversible et donc il y aura une unique solution.

A notre niveau, il fallait raisonner « à la main » : nous avons un système de 3 équations à 3 inconnues, essayons de nous ramener à un système de 2 équations à 2 inconnues. Pour cela, éliminons une inconnue dans 2 des 3 lignes. Par exemple, les z :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 & (L_1) \\ x + \lambda y + z &= \lambda & (L_2) \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 & (L_3) \end{cases}$$

1. Par combinaison linéaire : en soustrayant les deux premières lignes, on va éliminer les z ainsi on va effectuer $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$. De même $(L_3) \leftarrow (L_3) - \lambda(L_1)$ élimine les z dans (L_3).
2. Par substitution : (L_1) nous permet d'exprimer $z = 1 - \lambda x - y$ qu'on remplace dans (L_2) et (L_3).

Dans les deux cas, on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 & (L_1) \\ (1-\lambda)x + (\lambda - 1)y &= \lambda - 1 & (L_2) \\ (1-\lambda^2)x + (1-\lambda)y &= \lambda^2 - \lambda & (L_3) \end{cases}$$

Une fois arrivés ici, on remarque tout de suite que (L_2) nous donne une précieuse information : lorsque $\lambda = 1$, on aboutit donc à la ligne $0 = 0$ ce qui enlève une contrainte : on sait que cela donnera une infinité de solutions (ou aucune si le système induit dans les deux autres lignes n'est pas compatible). Pour avoir unicité de la solution, il faut donc que $\boxed{\lambda \neq 1}$. On peut alors à partir de maintenant prendre $\lambda \neq 1$ et diviser par $\lambda - 1$ les lignes 2 et par $1 - \lambda$ la ligne 3. Effectivement $\lambda^2 - \lambda = (\lambda - 1)\lambda$ et $1 - \lambda^2 = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 & (L_1) \\ -x + y &= 1 & (L_2) \\ (1+\lambda)x + y &= -\lambda & (L_3) \end{cases}$$

On peut maintenant résoudre le système $(L_2); (L_3)$, de la manière que l'on veut :

1. Comme en 4^e, par substitution ou combinaison linéaire. Le plus simple est d'exprimer $y = 1 + x$ à l'aide de (L_2) et de remplacer dans (L_3). On aboutit à :

   $$\begin{cases} \lambda x + y + z &= 1 & (L_1) \\ -x + y &= 1 & (L_2) \\ (2+\lambda)x &= -\lambda - 1 & (L_3) \end{cases}$$

   Pour que ce système ait une unique solution, il faut que (L_3) donne un unique résultat pour x. Lorsque $\lambda = -2$, on aboutit à la ligne $0 = -3$, donc aucune solution. Il faut donc que $\boxed{\lambda \neq -2}$.

   Dans les autres cas, on peut diviser par $2 + \lambda$ et on obtient $x = \boxed{-\dfrac{\lambda + 1}{\lambda + 2}}$.

   On remplace alors x dans (L_2), et on obtient $y = 1 + \left(-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\right) = \dfrac{\lambda+2}{\lambda+2} - \dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} = \boxed{\dfrac{1}{\lambda+2}}$
2. Ou bien on peut résoudre cela matriciellement. Effectivement cette fois la matrice associée sera de format 2×2 et on pourra l'inverser théoriquement !

   Effectivement le système peut s'écrire $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1+\lambda & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$, donc on peut travailler avec la matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1+\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de N vaut $(-1)\times 1-(1+\lambda)\times 1 = -1-1-\lambda = -2-\lambda$. Pour que ce déterminant soit non nul, il faut bien sûr que $\lambda \neq -2$.

On aboutit alors à $N^{-1} = \dfrac{1}{-(\lambda+2)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -(1+\lambda) & -1 \end{pmatrix}$.

On peut alors en déduire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-(\lambda+2)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -(1+\lambda) & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ \dfrac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$

Il nous reste maintenant à remplacer x et y par leurs valeurs dans (L_1) et on obtient :
$\lambda\left(-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\right) + \dfrac{1}{\lambda+2} + z = 1$

Soit $z = 1+\lambda\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} - \dfrac{1}{\lambda+2} = \dfrac{\lambda+2}{\lambda+2} + \dfrac{\lambda^2+\lambda}{\lambda+2} - \dfrac{1}{\lambda+2} = \dfrac{\lambda+2+\lambda^2+\lambda-1}{\lambda+2} = \boxed{\dfrac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2}}$.

Ainsi on a bien été capables de trouve une unique solution au système $\boxed{\text{lorsque } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2;1\}}$, et alors $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\ ;\ \dfrac{1}{\lambda+2}\ ;\ \dfrac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2}\right\}}$

Dans un sujet au baccalauréat, on vous aurait guidé en vous demandant de vérifier que la matrice $\dfrac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice M. Faites la vérification !

Exercice 5

La calculatrice donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix}$.

Pour résoudre $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,67 \\ 0,52 \end{pmatrix}$, il n'y a qu'à calculer $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,67 \\ 0,52 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}}$

Lorsqu'on résout $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,67 \\ 0,53 \end{pmatrix}$, on trouve cette fois $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,67 \\ 0,53 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -6,6 \\ 6,6 \end{pmatrix}}$

On remarque que même en ayant changé un tout petit coefficient (une différence de 0,01 sur un coefficient qui valait 0,52 cela fait environ 2%), le résultat varie énormément.

Cela veut dire que $\boxed{\text{ce système n'est pas exploitable numériquement}}$ dans des applications concrètes. Effectivement, dans une application concrète, les valeurs sont déterminées par des instruments de mesure, et il y a donc une incertitude liée à la mesure. On se rend compte qu'une toute petite variation donne une solution extrêmement différente. Dans ce genre de situations, on dit que la matrice est « mal conditionnée ».

Exercice 6

Cette fois-ci pas de mystère, il suffit encore une fois de calculer $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{20}{3} & \dfrac{74}{3} & -\dfrac{311}{9} \\ 0 & -1 & -4 & \dfrac{17}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -\dfrac{13}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{17}{3} & -\dfrac{121}{6} & \dfrac{511}{18} \end{pmatrix}$.

On peut alors résoudre le système $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}$ en calculant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = B^{-1} \times \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.