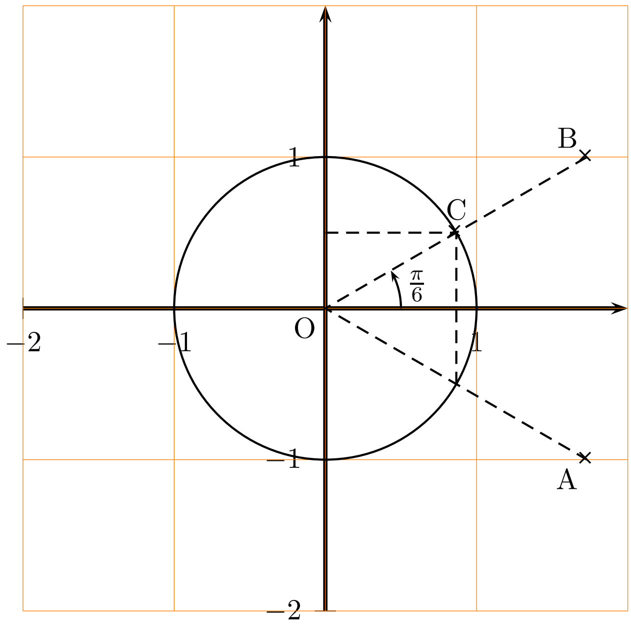
1 Niveau 1

Exercice 1.1 - Adapté d'Antilles-Guyane, Septembre 2008

1. Calculons le discriminant : $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4$. Ainsi l'équation a deux solutions complexes conjuguées :
$z_{\pm} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$. $\boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{3} - i ; \sqrt{3} + i\}}$
2. (a) Pour trouver la forme exponentielle de z_A, il nous faut trouver son module et son argument.
$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$.
Ainsi $z_A = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.
On voit alors que z_A a pour argument $-\dfrac{\pi}{6}$ puisque $cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
Donc $\boxed{z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$
z_A et z_B sont conjugués donc ont même module et des arguments opposés. Ainsi $\boxed{z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$
Quant à z_C, puisque C = mil[OB], $OC = \dfrac{OB}{2}$ et $(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{OB}})$ (à 2π près) d'où $\boxed{z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}}$
(b) On a laissé les traits de construction apparents :



(c) On a déjà montré que OA = OB = 2. Calculons maintenant AB $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{0+4} = 2$.
Ainsi les 3 côtés de OAB mesurent tous 2 unités de longueur donc OAB est équilatéral.

Exercice 1.2

1. $\mathcal{R}e(-5) = -5$, $\mathcal{I}m(-5) = 0$, $\overline{-5} = -5$.
2. $i^4 - 7i = 1 - 7i$, ainsi :
$\mathcal{R}e(i^4 - 7i) = 1$, $\mathcal{I}m(i^4 - 7i) = -7$, $\overline{i^4 - 7i} = 1 + 7i$.
3. $i + i^2 + i^3 = i - 1 - i = -1$, ainsi :
$\mathcal{R}e(i + i^2 + i^3) = -1$, $\mathcal{I}m(i + i^2 + i^3) = 0$, $\overline{i + i^2 + i^3} = -1$.

Exercice 1.3 - Donné par les inspecteurs en 2009

1. Entre u_1 et u_3 il y a 2 pas de calcul à faire, donc on a ajouté deux fois la raison.
Ainsi $48 - 12 = 2 \times raison$ et donc la raison vaut 18 $\boxed{\text{réponse b}}$
On pouvait aussi utiliser la formule $u_n = u_1 + (n-1) \times raison$, ici avec $n = 3$.
2. (u_n) est arithmétique, donc $u_n = u_0 + n \times raison$. Ainsi $u_n = 14\ 000 + n \times 100$.
(v_n) est géométrique, donc $v_n = v_0 \times raison^n$ Ainsi $v_n = 6\ 500 \times 1,1^n$.
On sait que (v_n) est croissante (car $1,1 > 0$), ainsi elle finira par dépasser (u_n) car une suite géométrique croissante finit toujours par dépasser une suite arithmétique.
On va donc regarder en 8, en 9 et en 131 et regarder où (v_n) est plus grande que (u_n).
$u_8 = 14800 > 13933 \approx v_8$; $u_9 = 14900 < 15326 \approx v_9$. Ainsi c'est en 9 $\boxed{\text{réponse a}}$.
3. Le terme général s'écrit $u_n = 2n + 5$. C'est donc de la forme $u_0 + n \times raison$ donc c'est une suite arithmétique de raison 2 $\boxed{\text{réponse c}}$.

2 Niveau 2

Exercice 2.1 - Donné par les inspecteurs en 2003

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z} + |z| = 6 + 2\mathrm{i}$. La forme algébrique de z est $\boxed{\frac{8}{3} - 2\mathrm{i}}$ (réponse a).
Effectivement on pouvait remarquer que ces 4 nombres complexes ont le même module :
$|z| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{36}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$.
On n'a plus qu'à résoudre $a - ib + \frac{10}{3} = 6 + 2i$ en identifiant partie réelle et partie imaginaire.
2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ vérifiant $|z - 1| = |z + \mathrm{i}|$ est la droite d'équation $\boxed{y = -x}$ (réponse b).
Effectivement en posant $A(1; 0)$ et $B(0; -1)$ l'énoncé est équivalent à trouver l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ (puisque $|z-1| = |z_M - z_A| = AM$ et $|z+\mathrm{i}| = |z_M - z_B| = MB$).
C'est donc la médiatrice de $[AB]$.
3. $\left(2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si n s'écrit sous la forme (où $k \in \mathbb{N}$) $\boxed{3k}$ (réponse c). Pour cette question, il fallait penser à l'écriture exponentielle de ce nombre complexe. Effectivement pour l'élévation à la puissance c'est bien plus simple d'avoir la forme exponentielle.
$|2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$. Ainsi $2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.
$\left(4e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 4^n e^{in\frac{\pi}{3}}$. Ce nombre est réel ssi son argument $n\frac{\pi}{3}$ vaut 0 ou π (à 2π près), donc s'il vaut 0 (à π près).
C'est à dire que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n\frac{\pi}{3} = k\pi$ c'est à dire exactement $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$.
4. Soit l'équation (E) : $z = \frac{6 - z}{3 - z}$ $(z \in \mathbb{C})$. Une solution de (E) est $\boxed{2 + \mathrm{i}\sqrt{2}}$ (réponse b).
Cette équation est en effet équivalente (lorsque $z \neq 3$) à $z(3 - z) = 6 - z$ c'est à dire $3z - z^2 = 6 - z$ c'est à dire $0 = z^2 - 4z + 6$. Le discriminant vaut $\Delta = 16 - 24 = -8$ donc les solutions sont complexes conjuguées : $\frac{4 \pm i\sqrt{8}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$.
5. Soient deux points A et B avec $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$.
L'affixe z_{C} du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$ est $\boxed{\sqrt{3} + 2\mathrm{i}}$ (réponse d). Un schéma suffisait pour s'en convaincre, en plaçant les points dans le plan complexe.

Exercice 2.2

1. C'est une forme indéterminée « $+\infty - (+\infty)$ ». On lève l'indétermination en factorisant :
$u_n = n^3 - n^5 = n^3(1 - n^2)$.
$$\left.\begin{array}{rcl} \lim 1 & = & 1 \\ \lim -n^2 & = & -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par somme}, \lim 1 - n^2 = -\infty.$$
De plus, $\lim n^3 = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim u_n = -\infty}$

2. C'est une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On lève l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par leurs prépondérants respectifs :
$v_n = \dfrac{n^4-1}{n^3+1} = \dfrac{n^4\left(1-\frac{1}{n^4}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{n\left(1-\frac{1}{n^4}\right)}{1+\frac{1}{n^3}}$.
$\left.\begin{array}{lcl}\lim 1 & = & 1\\ \lim \frac{1}{n^3} & = & 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ par somme, $\lim 1+\frac{1}{n^3} = 1$.
De la même manière $\left.\begin{array}{lcl}\lim 1-\frac{1}{n^4} & = & 1\\ \lim n & = & +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ par produit, $\lim n\left(1-\frac{1}{n^4}\right) = +\infty$.
Ainsi par quotient, $\boxed{\lim v_n = +\infty}$.
3. C'est une forme indéterminée « $+\infty-(+\infty)$ ». On lève l'indétermination en multipliant en haut et en bas par la quantité conjuguée :
$w_n = \sqrt{n+3}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{(\sqrt{n+3})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$.
Par somme, le dénominateur a pour limite $+\infty$ et le numérateur a clairement pour limite 3. Ainsi par quotient $\boxed{\lim w_n = 0}$.

3 Niveau 3

Exercice 3.1

1. Afin de trouver le module, des parties imaginaires ou réelles, il suffit de mettre sous forme algébrique.
$z_1z_2 = (1-2i)(7+i) = 7+i-14i-2i^2 = 7-13i+2 = 9-13i$.
Ainsi $|z_1z_2| = \sqrt{9^2+(-13)^2} = \sqrt{81+169} = \sqrt{250} = \boxed{5\sqrt{10}}$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1-2i}{7+i} = \dfrac{(1-2i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \dfrac{7-i-14i+2i^2}{7^2-i^2} = \dfrac{5-15i}{50}$.
Ainsi $\mathcal{I}m\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = -\dfrac{15}{50} = \boxed{-\dfrac{3}{10}}$
2. Le discriminant vaut $\Delta = 2^2-4\times1\times3 = 4-12 = -8$. Ainsi cette équation n'a aucune solution réelle (on demandait de résoudre dans $\mathbb{R}$!). $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

Exercice 3.2 - Métropole & La Réunion, Septembre 2008

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\| = \text{AB} \iff \left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right\| = \text{AB} \iff \left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = \text{AB}$$

$\iff 2M\text{I} = \text{AB} \iff \text{I}M = \dfrac{1}{2}\text{AB}$, ce qui signifie que M appartient au cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}\text{AB}$, qui est bien le cercle inscrit dans le carré. $\boxed{\text{Réponse 4}}$

Exercice 3.3

On reconnaît quasiment une équation de cercle. Pour trouver de quel cercle il s'agit de faire apparaître $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2 = R^2$:

$x^2+2x+y^2-8=0$
$x^2+2x+1-1+y^2-8=0$ — x^2+2x est le début du carré de $x+1$
$(x+1)^2+y^2-9=0$ — On termine avec l'identité remarquable
$(x+1)^2+(y-0)^2-9=0$ — Il n'y a pas de terme en y, donc c'est simplement $(y-0)^2$
$(x-(-1))^2+(y-0)^2-9=0$ — Il faut faire apparaître $(x-x_C)^2$
$(x-(-1))^2+(y-0)^2=9$ — On ajoute 9 de chaque côté
$(x-(-1))^2+(y-0)^2=3^2$ — 9 est le carré de 3

Ainsi cet ensemble de points correspond au $\boxed{\text{cercle de centre } (-1;0) \text{ et de rayon } 3}$.

Exercice 3.4

1. Le numérateur n'a pas de limite donc on ne peut pas conclure. On lève l'indétermination en encadrant et en utilisant un théorème des gendarmes :
   $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq sin(x) \leq 1$, ainsi en ajoutant 3 :
   $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq sin(x) + 3 \leq 4$
   On cherche la limite en $+\infty$. On peut donc prendre $n > 0$ et dans ce cas on peut diviser chaque membre de l'inéquation par n, il vient alors :
   $\forall n > 0, \dfrac{2}{n} \leq \dfrac{sin(n)+3}{n} \leq \dfrac{4}{n}$
   Clairement $\lim \dfrac{2}{n} = 0$ et $\lim \dfrac{4}{n} = 0$ donc on est bien dans le cas d'application du théorème des gendarmes, et ainsi :
   $\boxed{\lim u_n = 0}$.

2. C'est une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On va donc ici factoriser le numérateur et le dénominateur par leurs prépondérants respectifs :
   $v_n = \dfrac{3n+5}{2n-1} = \dfrac{n(3+\frac{5}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \dfrac{3+\frac{5}{n}}{2-\frac{1}{n}}$.
   $\left.\begin{array}{lcl} \lim 3 & = & 3 \\ \lim \frac{5}{n} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par somme}, \lim 3 + \frac{5}{n} = 3.$
   De la même manière $\lim 2 - \frac{1}{n} = 2$.
   Ainsi par quotient, $\boxed{\lim v_n = 1,5}$.