Exercice 1

1. (a) f est clairement dérivable sur $[0;3]$ car c'est une fonction polynomiale. $\forall x \in [0;3], f'(x) = -3x^2 + 9$. Il est clair que f' est nulle en $\pm\sqrt{3}$ (on peut calculer les racines du trinôme avec le discriminant si on ne le voit pas de suite). On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		3
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f	0	$\nearrow$	$6\sqrt{3}$	$\searrow$	0

   (b) Il fallait faire attention à ne tracer C_f que là où f est définie, à savoir sur $[0;3]$

2. (a) La section de la poutre est rectangulaire. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle dessiné sur l'énoncé, et on obtient $D^2 = x^2 + h^2$ soit exactement l'égalité $x^2 + h^2 = 9$.

   (b) La question précédente vient d'exprimer h^2 en fonction de x : $h^2 = 9 - x^2$. On en déduit que $\boxed{xh^2 = x \times (9 - x^2) = f(x)}$.

   (c) La poutre est la plus résistante possible lorsque xh^2 est le plus grand possible. On vient de démontrer que cette quantité est égale à $f(x)$. D'après la question 1), $f(x)$ est la plus grande possible lorsque $x = \sqrt{3}$. Dans ce cas, le théorème de Pythagore du 2)a) nous donne directement $h = \sqrt{6}$. Ainsi $\boxed{x = \sqrt{3} \text{ et } h = \sqrt{6}}$ sont les mesures optimales pour que la poutre soit la plus résistante possible.

Exercice 2

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x) & = & x^2 - 3x + 1 \\ v(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} u'(x) & = & 2x - 3 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

   Ainsi $\phi'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x + (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x[2x - 3 + (x^2 - 3x + 1)] = \boxed{\mathrm{e}^x(x^2 - x - 2)}$

2. <u>En $+\infty$:</u>

   La limite de $x^2 - 3x + 1$ est une forme indéterminée « $+\infty - (+\infty)$ ».

   On factorise par x^2 : $x^2 - 3x + 1 = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \text{par somme} \quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{par produit} \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

   De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$

   <u>En $-\infty$:</u>

   Afin de trouver la limite, il faut utiliser le résultat donné par l'énoncé (sinon on ne peut qu'aboutir à des formes indéterminées, à moins d'utiliser le fait que « l'exponentielle l'emporte sur les puissances »). Pour ce faire, utilisons la même factorisation qu'auparavant :

   $\phi(x) = \mathrm{e}^x x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{D'après l'énoncé, } \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x & = & 0 \\ \text{Comme précédemment, } \displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} & = & 1 \end{array}\right\} \text{par produit} \boxed{\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0}.$$

   La limite 0 en $-\infty$ nous permet de déduire que l'équation de l'asymptote horizontale à $\mathcal{C}_\phi$ est $\boxed{y = 0}$.

3. Pour étudier le signe de $\phi'(x)$ il s'agit d'étudier le signe du trinôme $x^2 - x - 2$.
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. $x_{\pm} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$. $x_+ = 2$; $x_- = -1$.
   Ainsi on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Sgn. $\phi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var. ϕ	0	$\nearrow$	$5\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^2$	$\nearrow$	$+\infty$

   $\phi(-1) = ((-1)^2 - 3 \times (-1) + 1)\mathrm{e}^{-1} = 5\mathrm{e}^{-1} \approx 1,8$
   $\phi(2) = (2^2 - 3 \times 2 + 1)\mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2 \approx -7,4$

4. Afin de tracer une courbe représentative de ϕ, il faut que l'on puisse voir la limite 0 en $-\infty$, ainsi que les deux extremums locaux, et la croissance de la fonction vers l'infini en $+\infty$. On peut donc opter pour la fenêtre de visualisation suivante :