Exercice 1 - Tiré d'Antilles-Guyane, 20 juin 2011

1. Soit $(x\ ;\ y)$ solution de (F), c'est-à-dire tel que $11x^2 - 7y^2 = 5$. Puisque $5 \equiv 0[5]$, cela entraine donc que $11x^2 - 7y^2 \equiv 0[5]$, c'est-à-dire $11x^2 \equiv 7y^2[5]$.
   Ensuite $11 \equiv 1[5]$ donc $11x^2 \equiv x^2[5]$
   Enfin $7 \equiv 2[5]$ donc $7y^2 \equiv 2y^2[5]$
   Il vient alors $x^2 \equiv 2y^2[5]$.
2.

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1

   Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 sont $\boxed{0,\ 1 \text{ et } 4}$.

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

   Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont $\boxed{0,\ 2 \text{ et } 3}$.
3. D'après 1), pour que $(x\ ;\ y)$ soit solution de (F), il faut que $x^2 \equiv 2y^2[5]$. D'après 2), cela implique que $x^2 \equiv 2y^2 \equiv 0[5]$, ce qui veut exactement dire que x et y sont des multiples de 5.
4. Raisonnons par l'absurde. Soient x et y des multiples de 5, donc $\exists a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5a$ et $\exists b \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 5b$. Supposons que $(x\ ;\ y)$ soit solution de (F). Il faut alors que :

$$\begin{aligned} 11x^2 - 7y^2 &= 5 && \text{On remplace } x \text{ et } y \\ 11 \times 25a^2 - 7 \times 25b^2 &= 5 && \text{On simplifie par 5} \\ 11 \times 5a - 7 \times 5b &= 1 \end{aligned}$$

   A partir de là, on peut factoriser par 5 pour aboutir à $5(11a - 7b) = 1$, ce qui n'est possible que si $5|1$ ce qui est faux : on aboutit à une contradiction ! On verra plus tard un autre argument permettant également d'aboutir à une contradiction.
   Ainsi notre hypothèse était fausse : si x et y sont deux multiples de 5, $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F).
   Il vient alors, en utilisant la question 3) et ce résultat, que $\boxed{\text{(F) n'a pas de solution}}$.

Exercice 2 - Tiré d'Antilles-Guyane, 19 juin 2012

1. Soit n un entier naturel. $2^{3n} = \left(2^3\right)^n$.
   Or $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Donc, en passant à la puissance, $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$.
   Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1$, on en déduit bien la propriété demandée.
2. (a) Faisons un suivi de la variable N ainsi que des affichages au fil du temps :

N° de ligne	N	Affichage
2	1	-
3	$N \leq \sqrt{A}$ est vrai $(1 \leq \sqrt{12})$: on rentre dans la boucle.	
4	Vrai car $\dfrac{12}{1} = 12$ et $\text{Ent}(12) = 12 \rightarrow$ ligne 5.	
5	1	"1 ; 12"
7	2	"1 ; 12"
3	$N \leq \sqrt{A}$ est vrai $(2 \leq \sqrt{12})$: on rentre dans la boucle.	
4	Vrai car $\dfrac{12}{2} = 6$ et $\text{Ent}(6) = 6 \rightarrow$ ligne 5.	
5	2	"1 ; 12 ; 2 ; 6"
7	3	"1 ; 12"
3	$N \leq \sqrt{A}$ est vrai $(3 \leq \sqrt{12})$: on rentre dans la boucle.	
4	Vrai car $\dfrac{12}{3} = 4$ et $\text{Ent}(4) = 4 \rightarrow$ ligne 5.	
5	3	"1 ; 12 ; 2 ; 6 ; 3 ; 4"
7	4	"1 ; 12 ; 2 ; 6 ; 3 ; 4"
3	$N \leq \sqrt{A}$ est faux $(4 > \sqrt{12})$: on sort de la boucle.	

   Ainsi cet algorithme affiche les six nombres $\boxed{\text{"1 ; 12 ; 2 ; 6 ; 3 ; 4"}}$.

   (b) Dans le cas général, cet algorithme affiche $\boxed{\text{l'ensemble des diviseurs positifs de A}}$.
   Effectivement, lorsque $\dfrac{\text{A}}{\text{N}} = \text{Ent}\left(\dfrac{\text{A}}{\text{N}}\right)$, c'est que $N|A$. Dans ce cas, on a trouvé deux diviseurs de de A : N, et $\dfrac{\text{A}}{\text{N}}$ (puisque $\text{A} = \text{N} \times \dfrac{\text{A}}{\text{N}}$), qui sont tous les deux affichés.
   On est certains qu'il n'y a pas d'autres diviseurs, puisque chaque diviseur N plus petit que $\sqrt{\text{A}}$, est couplé à un diviseur plus grand que $\sqrt{\text{A}}$ avec la même égalité $\text{A} = \text{N} \times \dfrac{\text{A}}{\text{N}}$.
   Remarque : dans le cas où A est un carré parfait, c'est-à-dire que $\text{A} = k^2$ où k est un entier, l'algorithme affiche à la fin en double le diviseur k, mais on ne demandait bien sûr pas d'être si méticuleux.