Exercice 1 : Suites
Partie A

1. Chaque siècle, la teneur en C^{14} diminue de $1,24\%$. Nous allons démontrer que la suite (N_k) est géométrique de raison $0,9876$.
   Pour ce faire, considérons N_k, la teneur en C^{14} au bout de k siècles, et trouvons N_{k+1} en fonction de N_k. Il y a une diminution de $1,24\%$ entre les deux valeurs, ainsi :
   $$N_{k+1} = N_k - 1,24\% \times N_k$$
   Nous pouvons réécrire cela $N_{k+1} = N_k \times (1 - 1,24\%) = N_k \times (1 - 0,0124) = N_k \times 0,9876$. Ainsi, on passe de n'importe quel terme de la suite au suivant en multipliant par $0,9876$. Nous venons de prouver que $\boxed{\text{la suite } (N_k) \text{ est géométrique de raison } 0,9876}$.
2. Puisque nous avons une suite géométrique, nous pouvons écrire que, pour tout entier positif k :
   $$N_k = N_0 \times (raison)^k$$
   Dans le cas qui nous intéresse, cela donne ainsi $\boxed{N_k = N_0 \times 0,9876^k}$.

Partie B

On part d'une certaine quantité N_0 de C^{14}, et l'on veut savoir au bout de combien de siècles la quantité de C^{14} restante sera de 5% de cette quantité initiale. Nous voulons savoir quel est le k qui fait que $N_k \leq N_0 \times 5\%$.
Rappelons que $N_k = N_0 \times 0,9876^k$. Ainsi on cherche à résoudre :

$$\begin{array}{rcll} N_0 \times 0,9876^k & \leq & N_0 \times 5\% & \\ & & & \text{On divise par } N_0 \text{ de chaque côté} \\ 0,9876^k & \leq & 5\% & \\ & & & \text{On simplifie} \\ 0,9876^k & \leq & 0,05 & \end{array}$$

Pour trouver le k qui convient, on peut rentrer comme fonction $Y_1 = 0,9876 \wedge X$.

On regarde alors les valeurs dans un tableau de valeurs, et on s'aperçoit que pour X = 240 cela donne environ 0,0501 et pour X = 241 cela donne environ 0,0494. Ainsi, on peut dater le squelette d'homme préhistorique : $\boxed{\text{il a environ 240 siècles}}$ (24 000 ans).

Remarque : on peut maintenant utiliser la fonction logarithme décimal pour cette question.

Exercice 2 : Tiré du baccalauréat, Sujet de La Réunion, Juin 2009

1. La fonction est positive là où sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, négative sinon.

x	6		7		9
Sgn. $f'(x)$		+	0	−	

2. (a) Nous voulons dériver $f(x) = 0,37x^3 - 9,35x^2 + 76,51x - 200,95$.
   $f(x) = 0,37 \times x^3 - 9,35 \times x^2 + 76,51 \times x - 200,95.$
   $f'(x) = 0,37 \times 3x^2 - 9,35 \times 2x + 76,51 \times 1 + 0.$
   $\boxed{f'(x) = 1,11x^2 - 18,7x + 76,51}$.
   Nous allons développer l'expression de l'énoncé pour retrouver l'expression de f' calculée :
   $$\begin{array}{rl} & (x-7)(1,11x - 10,93) \\ = & x \times 1,11x - x \times 10,93 - 7 \times 1,11x + 7 \times 10,93 \\ = & 1,11x^2 - 10,93x - 7,77x + 76,51 \\ = & 1,11x^2 - 18,7x + 76,51 \\ = & f'(x) \end{array}$$
   Nous venons bien de démontrer que $\boxed{f'(x) = (x-7)(1,11x - 10,93)}$.

(b) Nous allons utiliser la forme factorisée de f' pour retrouver son tableau de signes. Comme il s'agit d'étudier le signe d'un produit (de 2 facteurs), nous allons utiliser un tableau de signes.

$x - 7 > 0$
$x > 7$ — On ajoute 7 de chaque côté

$1,11x - 10,93 > 0$
$1,11x > 10,93$ — On ajoute $10,93$ de chaque côté
$x > \frac{10,93}{1,11}$ — On divise par $1,11$ de chaque côté

Nous devons étudier le signe sur $[6;9]$, dans la ligne des x on va donc aller de 6 à 9 (on ne va donc pas placer $\frac{10,93}{1,11} \approx 9.85$ qu'on a trouvé en étudiant le signe du second facteur)

x	6		7		9
Sgn. $(x-7)$		$-$	0	$+$	
Sgn. $(1,11x - 10,93)$		$-$		$-$	
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. La fonction f est croissante là où sa dérivée est positive, décroissante là où sa dérivée est négative. A l'aide du tableau de signes de f', on en déduit donc le tableau de variations suivant (on a complété les valeurs avec la calculatrice)

x	6	7	9
f(x)	$1,43$ ↗	$3,38$	↘ $0,02$

4. La fonction f mesure l'efficacité de la trypsine. Cette fonction est maximale lorsque x vaut 7, ainsi la réaction protéinique est la plus efficace possible $\boxed{\text{lorsque le pH du duodénum est de 7 (pH neutre)}}$.

Exercice 3 : Calcul algébrique

a. $6(2+3x)(3+x)$

$$\begin{aligned}
& 6 \times (2+3x) \times (3+x) && \text{On développe le facteur 2 avec le facteur 3.}\\
= \; & 6 \times (2\times 3 + 2 \times x + 3x \times 3 + 3x \times x) && \text{On simplifie dans la parenthèse.}\\
= \; & 6 \times (6 + 2x + 9x + 3x^2) && \text{On simplifie encore.}\\
= \; & 6 \times (6 + 11x + 3x^2) && \text{On développe.}\\
= \; & 6 \times 6 + 6 \times 11x + 6 \times 3x^2 && \text{On simplifie.}\\
= \; & 36 + 66x + 18x^2
\end{aligned}$$

b. $(3x-2)(2+x)(1-5x)$

$$\begin{aligned}
& (3x-2) \times (2+x) \times (1-5x)\\
= \; & (3x-2) \times (2 \times 1 - 2 \times 5x + x \times 1 - x \times 5x)\\
= \; & (3x-2) \times (2 - 10x + x - 5x^2)\\
= \; & (3x-2) \times (2 - 9x - 5x^2)\\
= \; & 3x \times 2 - 3x \times 9x - 3x \times 5x^2 - 2 \times 2 + 2 \times 9x + 2 \times 5x^2\\
= \; & 6x - 27x^2 - 15x^3 - 4 + 18x + 10x^2\\
= \; & -4 + 24x - 17x^2 - 15x^3
\end{aligned}$$

c. $-2(5+\frac{3}{2}x)(4x-1)$

$$\begin{aligned}
& -2 \times (5 + \tfrac{3}{2}x) \times (4x - 1)\\
= \; & -2 \times (5 \times 4x - 5 \times 1 + \tfrac{3}{2}x \times 4x - \tfrac{3}{2}x \times 1)\\
= \; & -2 \times (20x - 5 + \tfrac{3\times 4}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x)\\
= \; & -2 \times (\tfrac{40}{2}x - 5 + \tfrac{12}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x)\\
= \; & -2 \times (\tfrac{37}{2}x - 5 + 6x^2)\\
= \; & -2 \times \tfrac{37}{2}x + 2 \times 5 - 2 \times 6x^2\\
= \; & 10 - 37x - 12x^2
\end{aligned}$$

2.a) et b)

$$3x-1>0 \xrightarrow{1} 3x>1 \xrightarrow{\div 3} x>\tfrac{1}{3}$$

$$2-x>0 \xrightarrow{+x} 2>x$$

$$x+3>0 \xrightarrow{-3} x>-3$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
Sgn. $3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Sgn. $2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Sgn. *Produit*		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Sgn. -1		$-$		$-$	
Sgn. $x+3$		$-$	0	$+$	
Sgn. $x+3$		$-$	0	$+$	
Sgn. *Produit*		$-$	0	$-$	

c.

$$x-3>0 \xrightarrow{+3} x>3$$

$$5-3x>0 \xrightarrow{+3x} 5>3x \xrightarrow{\div 3} \tfrac{5}{3}>x$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
Sgn. 2		$+$		$+$		$+$	
Sgn. $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
Sgn. $5-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
Sgn. *Produit*		$-$	0	$+$	0	$-$	