

Un menuisier installe des portes et des fenêtres. Il se fournit chaque mois auprès d'un fabricant, qui lui propose deux sortes de lots pour ses travaux standards : le lot A est composé de 5 portes et 5 fenêtres, le lot B est composé de 4 portes et 2 fenêtres.

Le menuisier ayant une place limitée, il ne peut pas stocker plus de 120 portes et de 90 fenêtres.

On note x le nombre de lots A et y le nombre de lots B qu'il achète un mois donné à son fournisseur.

1. Décrire par un système d'inéquations les contraintes du problème (on établira clairement le rapport avec l'énoncé).
2. Montrer que ce système est équivalent au système suivant, dans lequel x et y désignent des inconnues entières :

$$(S) \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 30 - \frac{5}{4}x \\ y \leq 45 - \frac{5}{2}x \end{cases}$$

Dans le repère orthogonal fourni en annexe, on a tracé les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = -\frac{5}{4}x + 30$ et $y = -\frac{5}{2}x + 45$.

Déterminer graphiquement, en hachurant la partie du plan qui ne convient pas, l'ensemble des points M du plan dont le couple de coordonnées $(x ; y)$ vérifie le système (S) .

3. À l'aide du graphique, déterminer le nombre maximum de lots B que le menuisier peut acheter s'il achète 10 lots A.
4. Le bénéfice effectué sur un lot A est de 400 euros et sur un lot B de 200 euros. On suppose que le menuisier installe la totalité de son stock pendant le mois en cours.
 - (a) Exprimer, en fonction de x et de y le bénéfice mensuel qu'il peut réaliser.
 - (b) Représenter sur le graphique précédent les couples $(x ; y)$ qui permettent de réaliser un bénéfice de 5 000 €.
 - (c) Déterminer graphiquement les nombres de lots A et de lots B à acquérir et installer pour que le bénéfice mensuel soit le plus grand possible. Quel est ce bénéfice ?

ANNEXE
À rendre avec la copie

