1. Nous pouvons traduire les données du problème sous forme d'équations en reprenant pas à pas l'énoncé :
   - contrainte liée aux nombres : x et y sont des nombres entiers naturels
   - contrainte liée aux portes : $5x + 4y \leq 120$
   - contrainte liée aux fenêtres : $5x + 2y \leq 90$

   Nous obtenons donc le système suivant : $\boxed{\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 4y \leq 120 \\ 5x + 2y \leq 90 \end{cases}}$

2. Montrons que ce système est équivalent au système S, dans lequel x et y désignent des inconnues entières :
   x et y sont des nombres entiers naturels veut exactement dire que $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   $5x + 4y \leq 120 \iff 4y \leq 120 - 5x \iff y \leq 30 - \frac{5}{4}x.$
   $5x + 2y \leq 90 \iff 2y \leq 90 - 5x \iff y \leq 45 - \frac{5}{2}x.$
   Nous obtenons bien le système (S).

   L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y \leq ax + b$ est le demi-plan situé au dessous de la droite d'équation $y = ax + b$, celle-ci incluse.
   - $x \geq 0$ et $y \geq 0$ définissent le premier quadrant.
   - L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \leq 30 - \frac{5}{4}x$ est le demi-plan situé au dessous de la droite (d_1). La partie ne convenant pas est hachurée en cyan sur l'annexe (hachures diagonales allant du bas gauche vers le haut droite).
   - L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \leq 45 - \frac{5}{2}x$ est le demi-plan situé au dessous de la droite (d_2). La partie ne convenant pas est hachurée en vert (hachures diagonales allant du haut gauche vers le bas droite).

   L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient le système (S) est l'ensemble des points à coordonnées entières situés dans la partie du plan non hachurée sur le dessin ainsi qu'au premier quadrant, les segments de droites étant inclus.

3. À l'aide du graphique, déterminons le nombre maximum de lots B que le menuisier peut acheter s'il achète 10 lots A. Traçons la droite d'équation $x = 10$ et lisons l'ordonnée entière la plus grande du point faisant encore partie du polygone des contraintes. Nous avons le point marqué par un carré. Il pourra acheter au maximum 17 lots B.

4. (a) S'il vend x lots A son bénéfice est de $400x$, s'il vend y lots B son bénéfice est de $200y$. Au total, le bénéfice mensuel G qu'il peut réaliser est $\boxed{G = 400x + 200y}$.

   (b) Les couples $(x\ ;\ y)$ qui permettent de réaliser un bénéfice de 5 000 € sont les couples, à coordonnées entières, appartenant à la droite d'équation $400x + 200y = 5\ 000$ ou $y = -2x + 25$ tracée en gris (en pointillés) dans le repère.

   (c) Déterminons le couple $(x\ ;\ y)$ de lots A et de lots B à acquérir et installer pour que le bénéfice mensuel soit le plus grand possible. Il s'agit donc de tracer une droite parallèle à celle de la question 4)b) le plus haut possible, et qui ait un point dans le polygone des contraintes.
   En essayant avec la règle, on voit que la droite la plus haute possible passe par le point $(12\ ;\ 15)$.
   Il doit acquérir et installer 12 lots A et 15 lots B pour que son bénéfice soit maximal.
   $400 \times 12 + 200 \times 15 = 4\ 800 + 3\ 000 = 7\ 800$. Le bénéfice maximal est de $\boxed{7\ 800\ €}$.

ANNEXE
À rendre avec la copie