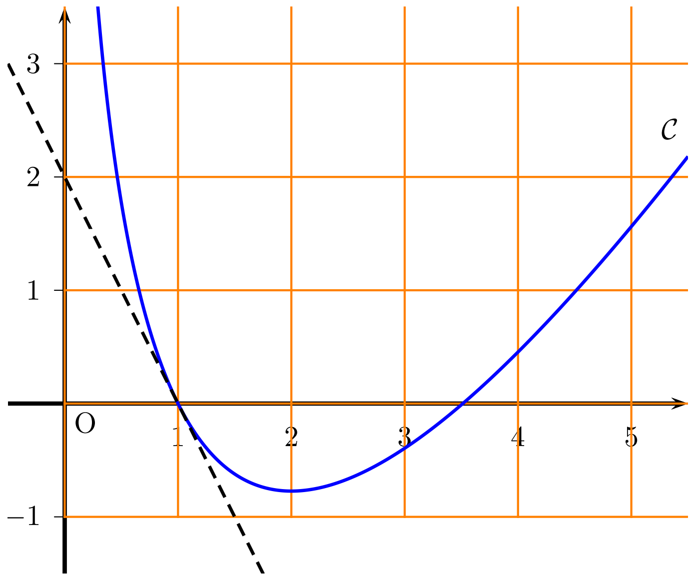
La courbe $\mathcal{C}$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.



La droite tracée en pointillés est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

Partie A

Dans cette partie, il est demandé de répondre aux différentes questions par lecture graphique. Aucun calcul n'est donc attendu.

1. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
3. Déterminer $f'(1)$.

Partie B

En fait, la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 2 - 4\ln(x).$$

1. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x}$ pour tout $x > 0$.
2. En déduire le tableau de variation de f. On indiquera la valeur exacte du minimum.
   On notera α la solution de l'équation $f(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près puis à 10^{-3} près.

Partie C

Soit C la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ par :

$$C(x) = x^2 + 2x - 4x\ln(x).$$

Une entreprise fabrique des boitiers de télécommande plastiques. Lorsque l'entreprise fabrique x milliers de boitiers par jour, le coût moyen de production d'un boitier est égal à $C(x)$ (x est compris entre 1 millier et 6 milliers). Le coût moyen est exprimé en euros.

1. Montrer que $C'(x) = 2x - 2 - 4\ln(x)$ où C' désigne la fonction dérivée de C sur $[1\,;\,6]$.
2. À l'aide de l'étude faite dans la partie B, déterminer le signe de $C'(x)$ sur $[1\,;\,6]$ puis établir le tableau de variation de C sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
3. En déduire le nombre de boitiers à produire par jour pour que le coût de production d'un boitier soit minimum. On donnera une valeur approchée du résultat à un boitier près.