Exercice 1 - Pondichéry, 21 avril 2010 **8 points**

1. Le prix du mètre carré a diminué de 14 % entre 2008 et 2009 : il a été multiplié par $1+\dfrac{-14}{100}=0,86$.

$$3\ 028\times 0,86\approx 2\ 604.$$

Le prix du mètre carré en 2009 est d'environ $\boxed{2\ 604\text{ €}}$.

2. Le prix du mètre carré a augmenté de 2 % entre 1996 et 1997 : il a été multiplié par $1+\dfrac{2}{100}=1,02$.
On peut faire le schéma suivant :

$$prix_{1996}\xrightarrow{\times 1,02}1\ 400$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
1\ 400 &= prix_{1996}\times 1,02 && \text{On divise par } 1,02 \text{ de chaque côté}\\
\frac{1\ 400}{1,02} &= prix_{1996} && \text{On donne une valeur approchée à l'unité}\\
\boxed{1\ 373} &\approx prix_{1996}
\end{aligned}$$

3. Le taux d'évolution entre 1997 et 2007 est $\dfrac{\text{valeur de 2007} - \text{valeur de 1997}}{\text{valeur de 1997}}=\dfrac{3\ 361-1\ 400}{1\ 400}\approx 1,401$.
Le taux d'évolution est d'environ $\boxed{140{,}1\ \%}$.

4. Soit t le taux d'évolution annuel moyen. S'il y avait eu à chaque année cette évolution :

$$1997\xrightarrow{\times(1+t)}1998\xrightarrow{\times(1+t)}1999\xrightarrow{\times(1+t)}2000\xrightarrow{\times(1+t)}2001\xrightarrow{\times(1+t)}2002\xrightarrow{\times(1+t)}2003\xrightarrow{\times(1+t)}2004\xrightarrow{\times(1+t)}2005\xrightarrow{\times(1+t)}2006\xrightarrow{\times(1+t)}2007$$

$$1997\xrightarrow{\times(1+t)^{10}}2007$$

Entre 1997 et 2007, il y a eu dix évolutions, le prix du mètre carré a été multiplié par $(1\ +\ t)^{10}$.
D'après 3), le coefficient multiplicateur global est $2,401$ (car il vaut $1+$taux global $=1+1,401$).
Donc $(1+t)^{10}=2,401$.
C'est équivalent à $1+t=2,401^{\frac{1}{10}}$.
En enlevant 1 de chaque côté, cela donne $t=2,401^{\frac{1}{10}}-1\approx 0,092$.
Le taux d'évolution annuel moyen est d'environ $\boxed{9{,}2\ \%}$.

Exercice 2 - Pondichéry, 21 avril 2010 **6 points**

1. On voit graphiquement que les trois droites ont chacune une ordonnée à l'origine différente. Il suffit donc d'écrire les trois équations réduites, et de regarder laquelle a 10 (ce sera (D_1)), laquelle a 7 (ce sera (D_2)).

$$\begin{aligned}
x+y&=7 && \text{On soustrait } x \text{ de chaque côté}\\
y&=7-x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x+2y&=12 && \text{On soustrait } x \text{ de chaque côté}\\
2y&=12-x && \text{On divise par 2 de chaque côté}\\
y&=6-0,5x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3x+2y&=20 && \text{On soustrait } 3x \text{ de chaque côté}\\
2y&=20-3x && \text{On divise par 2 de chaque côté}\\
y&=10-1,5x
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{x+y=7 \text{ est une équation de } (D_2)}$ et $\boxed{3x+2y=20 \text{ est une équation de } (D_1)}$.

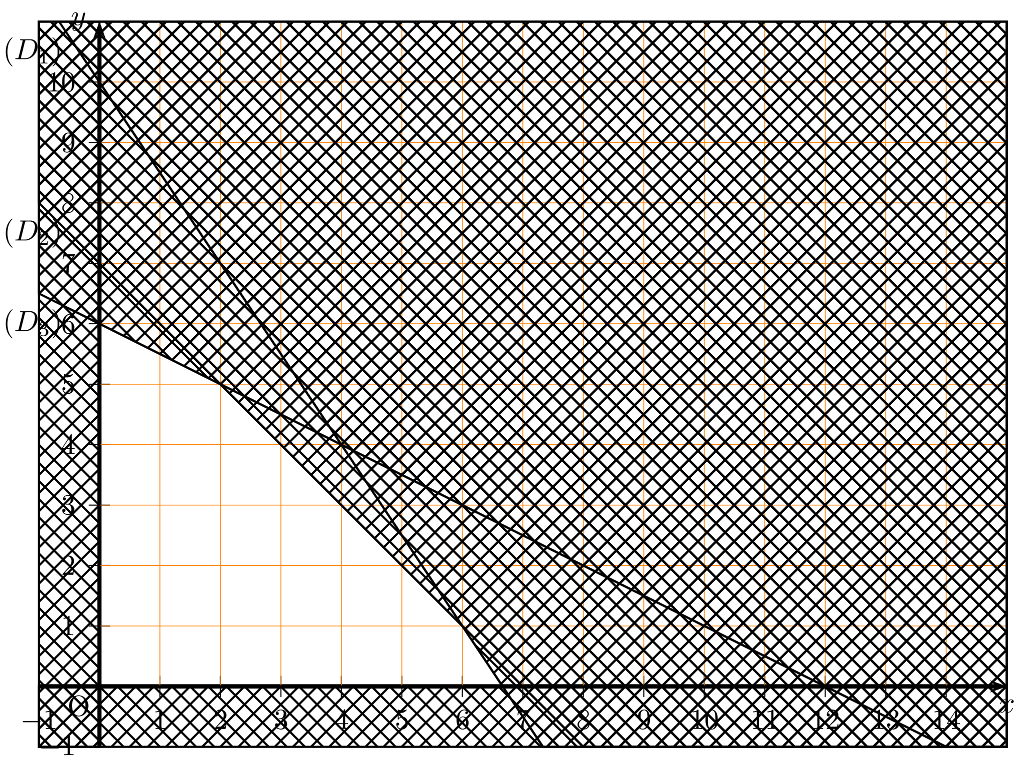
2. Pour déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des droites (D_1) et (D_2), il suffit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues, celui formé par leurs deux équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=7 \\ 3x+2y=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7-y \\ 3(7-y)+2y=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7-y \\ 21-3y+2y=20 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7-y \\ 21-y=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7-y \\ -y=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7-1=6 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Ainsi le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) a pour coordonnées $\boxed{(6\,;\,1)}$. (on peut vérifier graphiquement que les calculs sont justes)

3. - Les points qui vérifient $x \geq 0$ sont à droite de l'axe des ordonnées, je hachure à gauche.
   - Les points qui vérifient $y \geq 0$ sont au-dessus de l'axe des abscisses, je hachure en dessous.
   - $x+2y \leq 12$: on a vu que cette équation était liée à (D_3). Pour savoir quel côté hachurer, je choisis un point qui n'est pas sur (D_3). Par exemple le point $O(0;0)$. Pour ce point $x_O+2y_O=0$ qui est inférieur à 12. Ainsi O respecte l'inégalité, il faut hachurer de l'autre côté de (D_3).
   - $3x+2y \leq 20$: on a vu que cette équation était liée à (D_1). Pour savoir quel côté hachurer, je choisis un point qui n'est pas sur (D_1). Par exemple le point $O(0;0)$. Pour ce point $3x_O+2y_O=0$ qui est inférieur à 20. Ainsi O respecte l'inégalité, il faut hachurer de l'autre côté de (D_1).
   - $x+y \leq 7$: on a vu que cette équation était liée à (D_2). Pour savoir quel côté hachurer, je choisis un point qui n'est pas sur (D_2). Par exemple le point $O(0;0)$. Pour ce point $x_O+y_O=0$ qui est inférieur à 7. Ainsi O respecte l'inégalité, il faut hachurer de l'autre côté de (D_2).



Exercice 3 - Adapté de métropole, Septembre 2008 **10 points**

1. Le nombre de gâteaux au yaourt correspond à x et le nombre de gâteaux au chocolat à y. Il faut donc savoir si le point $(19;4)$ est dans le polygone OABCD ou pas (puisque l'énoncé nous dit que ce polygone correspond aux programmes réalisables). En regardant sur le graphique, on voit qu'il n'y est pas : ainsi $\boxed{\text{cette phrase n'est pas vraie}}$.
2. On nous dit que la droite en pointillés correspond aux cas où la recette est de 160 €. On peut prendre le point $(0;20)$ qui est sur cette droite.

   Ainsi la fabrication de $\boxed{\text{0 gâteau au yaourt et 20 gâteaux au chocolat}}$ donne lieu à une recette de 160 €.

3. • (OA) est l'axe des ordonnées : une équation de (OA) est $\boxed{x = 0}$.

• La droite (AB) n'est pas verticale. Je peux écrire son équation sous la forme $y = ax + b$.
Son coefficient directeur se calcule par la formule $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{20 - 25}{10 - 0} = \dfrac{-5}{10} = -0,5$.
Ici, je peux lire l'ordonnée à l'origine, c'est $b = 20$.
Ainsi une équation de (AB) est $\boxed{y = -0,5x + 20}$.

• La droite (BC) n'est pas verticale. Je peux écrire son équation sous la forme $y = ax + b$.
Son coefficient directeur se calcule par la formule $a = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{\frac{60}{7} - 20}{\frac{120}{7} - 10} = \dfrac{\frac{60}{7} - \frac{20\times7}{7}}{\frac{120}{7} - \frac{10\times7}{7}} = \dfrac{\frac{60-140}{7}}{\frac{120-70}{7}} = \dfrac{\frac{-80}{7}}{\frac{50}{7}} = \dfrac{-80}{7} \times \dfrac{7}{50} = \dfrac{-80}{50} = -1,6$.
Ici, je ne peux pas lire l'ordonnée à l'origine. Je vais donc écrire la forme $y = -1,6x + b$ de son équation, et utiliser un point de la droite, par exemple le point B (calculs plus simples) :

$$\begin{array}{rcll} y_B & = & -1,6x_B + b & \\ & & & \text{On remplace par les valeurs} \\ 20 & = & -1,6 \times 10 + b & \\ & & & \text{On simplifie} \\ 20 & = & -16 + b & \\ & & & \text{On ajoute 16 de chaque côté} \\ \boxed{36} & = & b & \end{array}$$

Ainsi une équation de (BC) est $\boxed{y = -1,6x + 36}$.

• La droite (CD) n'est pas verticale. Je peux écrire son équation sous la forme $y = ax + b$.
Son coefficient directeur se calcule par la formule $a = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0 - \frac{60}{7}}{20 - \frac{120}{7}} = \dfrac{-\frac{60}{7}}{\frac{20\times7}{7} - \frac{120}{7}} = \dfrac{\frac{-60}{7}}{\frac{140-120}{7}} = \dfrac{\frac{-60}{7}}{\frac{20}{7}} = \dfrac{-60}{7} \times \dfrac{7}{20} = \dfrac{-60}{20} = -3$.
Ici, je ne peux pas lire l'ordonnée à l'origine. Je vais donc écrire la forme $y = -3x + b$ de son équation, et utiliser un point de la droite, par exemple le point D (calculs plus simples) :

$$\begin{array}{rcll} y_D & = & -3x_D + b & \\ & & & \text{On remplace par les valeurs} \\ 0 & = & -3 \times 20 + b & \\ & & & \text{On simplifie} \\ 0 & = & -60 + b & \\ & & & \text{On ajoute 60 de chaque côté} \\ \boxed{60} & = & b & \end{array}$$

Ainsi une équation de (CD) est $\boxed{y = -3x + 60}$.

• (OD) est l'axe des abscisses : une équation de (OD) est $\boxed{y = 0}$.

4. • Une équation de (OA) est $x = 0$. Le polygone est au-dessus, donc l inéquation est $x \geq 0$.

• Une équation de (OD) est $y = 0$. Le polygone est à droite, donc l inéquation est $y \geq 0$.

• Une équation de (AB) est $y = -0,5x + 20$. Je prends un point qui est dans le polygone, par exemple $P(1;1)$. Il faut que je mette le sens de l inégalité pour que P la respecte. Membre de gauche : $y_P = 1$; membre de droite $-0,5x_P + 20 = -0,5 \times 1 + 20 = 19,5$. Ainsi je dois mettre $\leq$ car $1 \leq 19,5$; l inéquation est $y \leq -0,5x + 20$

• Une équation de (BC) est $y = -1,6x + 36$. Je prends un point qui est dans le polygone, par exemple $P(1;1)$. Il faut que je mette le sens de l inégalité pour que P la respecte. Membre de gauche : $y_P = 1$; membre de droite $-1,6x_P + 36 = -1,6 \times 1 + 36 = 34,4$. Ainsi je dois mettre $\leq$ car $1 \leq 34,4$; l inéquation est $y \leq -1,6x + 36$

• Une équation de (CD) est $y = -3x + 60$. Je prends un point qui est dans le polygone, par exemple $P(1;1)$. Il faut que je mette le sens de l inégalité pour que P la respecte. Membre de gauche : $y_P = 1$; membre de droite $-3x_P + 60 = -3 \times 1 + 60 = 57$. Ainsi je dois mettre $\leq$ car $1 \leq 57$; l inéquation est $y \leq -3x + 60$

Un système est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y & \leq & -0,5x + 20 \\ y & \leq & -1,6x + 36 \\ y & \leq & -3x + 60 \end{array}\right.$$