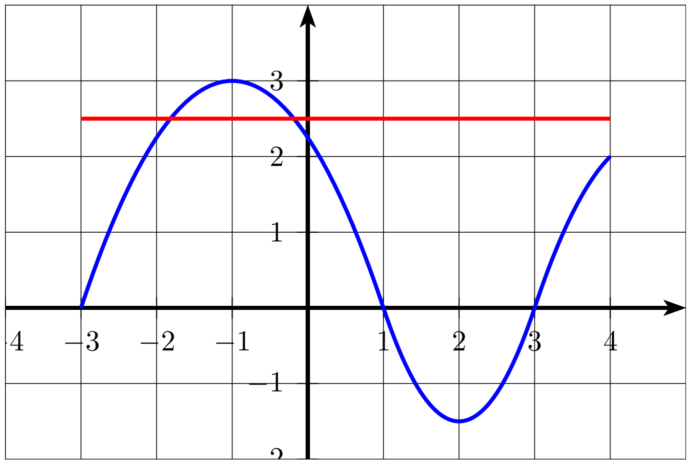
Exercice 1 **10 points**

1. Pour dériver $f(x) = 5x\ln(x)$, on reconnaît un produit $u \times v$ avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 5x \\ v(x) & = & \ln(x) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & 5 \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$ ainsi $f'(x) = 5 \times \ln(x) + 5x \times \dfrac{1}{x} = \boxed{5\ln(x) + 5}$

2. En s'aidant du graphique :



(a) Pour regarder où $g(x) = 2,5$, il faut regarder où la courbe de g coupe la droite d'équation $y = 2,5$ (qui est parallèle à l'axe des abscisses, à 2,5).
Effectivement $(x; 2,5) \in \mathcal{C}_g \Leftrightarrow g(x) = 2,5$.
On voit donc que l'équation $g(x) = 2,5$ a $\boxed{\text{deux solutions}}$ (environ $-1,8$ et $-0,3$).

(b) La fonction g' est négative là où g est décroissante. Pour résoudre graphiquement l'inéquation $g'(x) \leq 0$, on va donc regarder où g est décroissante : on voit que c'est le cas $\boxed{\text{sur [-1 ; 2]}}$.

3. Une dépréciation de 20 % correspond à un taux d'évolution de -20 % :

$$\text{Achat} \xrightarrow{-20\ \%} \text{Après 1 an} \xrightarrow{-20\ \%} \text{Après 2 ans} \xrightarrow{-20\ \%} \text{Après 3 ans}$$

Un taux d'évolution de -20 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + (-20\ \%) = 0,8$. Ainsi sa valeur après trois ans est de $850€ \times 0,8^3 = \boxed{435,20€}$

4. Le taux d'évolution entre 2005 et 2008 vaut $\dfrac{\text{Valeur de 2008} - \text{Valeur de 2005}}{\text{Valeur de 2005}} = \dfrac{6\ 800 - 2\ 000}{2\ 000} = 2,4.$

Le taux d'évolution est de $\boxed{240\ \%}$.

Exercice 2 - Mercatique Nouvelle-Calédonie, Novembre 2010 **10 points**

Partie A : étude d'une fonction

1. Nous voulons dériver $f(x) = 0,5x^2 - 13x - 60 + 55\ln(x+3)$.

$f(x) = 0,5 \times x^2 - 13 \times x - 60 + 55 \times \ln(x+3)$.

$f'(x) = 0,5 \times 2x - 13 \times 1 - 0 + 55 \times \dfrac{1}{x+3}$.

$\boxed{f'(x) = x - 13 + \dfrac{55}{x+3}}$.

1 : Ecrire chaque terme de f comme produit d'une constante par une fonction de référence.

2 : Dériver : dans chaque terme garder la constante et dériver la fonction de référence.

3 : Simplifier.

Nous allons maintenant tout mettre au même dénominateur :

$f'(x) = x - 13 + \dfrac{55}{x+3} = \dfrac{x(x+3)}{x+3} - \dfrac{13(x+3)}{x+3} + \dfrac{55}{x+3} = \dfrac{x(x+3) - 13(x+3) + 55}{x+3} = \dfrac{x^2 + 3x - 13x - 39 + 55}{x+3} = \dfrac{x^2 - 10x + 16}{x+3}$

Nous allons développer l'expression de l'énoncé pour retrouver l'expression de f' calculée :

$\dfrac{(x-2)(x-8)}{(x+3)} = \dfrac{x^2 - 8x - 2x + 16}{x+3} = \dfrac{x^2 - 10x + 16}{x+3} = f'(x)$

2. Pour avoir le tableau de variations de f, il nous faut le tableau de signes de f'. Nous allons donc utiliser un tableau de signes.
   - Où $x - 2$ est-il positif ? $x - 2 > 0 \xrightarrow{+2} x > 2$
   - Où $x - 8$ est-il positif ? $x - 8 > 0 \xrightarrow{+8} x > 8$
   - Où $x + 3$ est-il positif ? $x + 3 > 0 \xrightarrow{-8} x > -3$

   Nous devons étudier le signe sur $[0; 12]$, dans la ligne des x on va donc aller de 0 à 12 (et donc ne pas placer le -3) :

x	0		2		8		12
Sgn. $x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
Sgn. $x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
Sgn. $x+3$		$+$		$+$		$+$	
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. La fonction f est croissante là où sa dérivée est positive, décroissante là où sa dérivée est négative. A l'aide du tableau de signes de f', on en déduit donc le tableau de variations suivant (on a complété les valeurs à l'aide de la calculatrice) :

x	0		2		8		12
Var. f	$\approx 0,42$	$\nearrow$	$\approx 4,52$	$\searrow$	$\approx -0,12$	$\nearrow$	$\approx 4,94$

Partie B : application économique

1. On remplit A2 avec 0, puis on peut par exemple, au choix :
   - remplir A3 avec 0,5, sélectionner A2 et A3, et tirer vers le bas.
   - remplir A3 avec =A2 + 0,5, sélectionner seulement A3, et tirer vers le bas ;
2. Dans B2 on peut saisir =0,5 * A2 ∧ 2 - 13*A2 - 60 + 55 *LN(A2 + 3) pour recopier vers le bas et obtenir les valeurs de la colonne B.
3. f représente le bénéfice, en milliers d'euros, de l'entreprise. Donc l'entreprise est déficitaire quand $f(x) \leq 0$.

   Le tableau de variations nous indique que c'est forcément sur un intervalle $[\alpha ; \beta]$ contenant 8 que f est négative. Effectivement $f(0) > 0$ et f est croissante sur $[0; 2]$, puis f est décroissante enfin croissante.

   Sur le tableau fourni en annexe, on voit que c'est le cas pour $x \in [7,5 ; 8,5]$.

   A l'aide de la calculatrice, cherchons des valeurs plus précises de la borne α de cet intervalle :
   - On vient de voir sur le tableau que $7 < \alpha < 7,5$, donc dans la table de valeurs on va aller de 7 à 7,5 par pas de 0,1 :
     $f(7,3) \approx 0,01 > 0$ et $f(7,4) \approx -0,02 < 0$ donc $7,3 < \alpha < 7,4$
   - Donc dans la table de valeurs on va maintenant aller de 7,3 à 7,4 par pas de 0,01 :
     $f(7,33) \approx 0,002 > 0$ et $f(7,34) \approx -0,001 < 0$ donc $\boxed{7,33 < \alpha < 7,34}$

   Procédons de même pour la borne β de cet intervalle :
   - On vient de voir sur le tableau que $8,5 < \beta < 9$, donc dans la table de valeurs on va aller de 8,5 à 9 par pas de 0,1 :
     $f(8,6) \approx -0,01 < 0$ et $f(8,7) \approx 0,02 > 0$ donc $8,6 < \beta < 8,7$
   - Donc dans la table de valeurs on va maintenant aller de 8,6 à 8,7 par pas de 0,01 :
     $f(8,64) \approx -0,0005 < 0$ et $f(8,65) \approx 0,003 > 0$ donc $\boxed{8,64 < \beta < 8,65}$