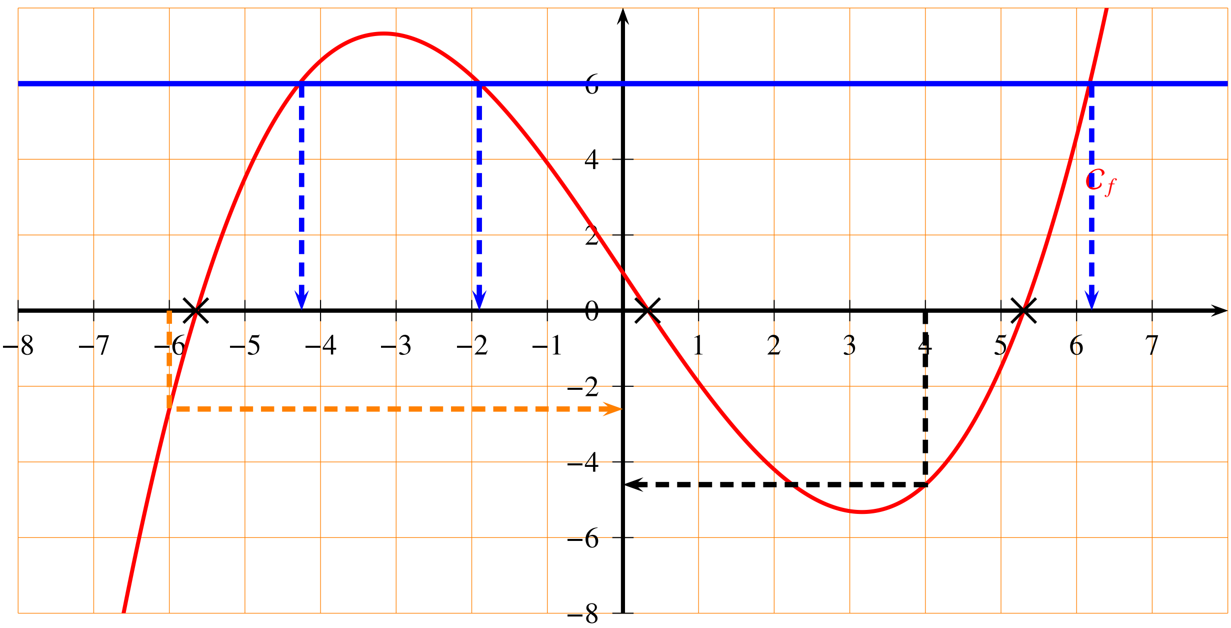
Exercice 1 — Fonctions 3,5 points [0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 + 0,5]

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f :



1. L'image de 4 par f est environ $\boxed{-4,5}$ (traits pointillés noirs).
2. L'ensemble des antécédents de 6 par f est $\boxed{\{-4,3; -1,9; 6,2\}}$ (traits bleus).
3. L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est $\boxed{\{-5,6; 0,3; 5,3\}}$ (croix).
4. $f(-6) = \boxed{-2,5}$ (traits pointillés orange).
5. Le tableau de valeurs est :

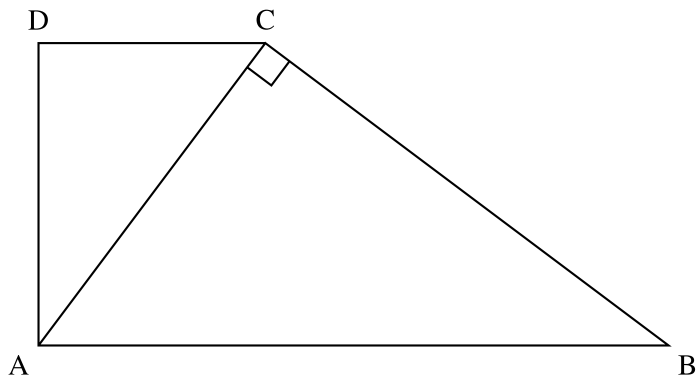
x	-6	-3	0	3	6
$f(x)$	-2,5	7,2	1	-5,5	4,5

6. Pour calculer $f(2)$, on remplace x par 2 dans l'expression $f(x) = 0,1x^3 - 3x + 1$, cela donne :
$f(2) = 0,1 \times 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 0,1 \times 8 - 6 + 1 = 0,8 - 5 = \boxed{-4,2}$.

BONUS Pour calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$, on fait de même :
$f\left(\sqrt{2}\right) = 0,1 \times \left(\sqrt{2}\right)^3 - 3 \times \sqrt{2} + 1 = 0,1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = 0,1 \times 2 \times \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = 0,2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 1 = \boxed{-2,8\sqrt{2} + 1}$.

Exercice 2 — Géométrie 3,5 points [1 + 0,5 + 1 + 1]

Dans la figure suivante, on a codé un angle droit, et on donne également les valeurs $AC = 5$, $AD = 4$ et $DC = 3$. De plus, on indique que $(AB) \parallel (CD)$.



1. Dans le triangle ADC, le côté [AC] est le plus grand, nous allons donc calculer :

$$\begin{cases} AC^2 = 5^2 = 25 \\ AD^2 + DC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \end{cases}$$

   Il y a donc égalité $AC^2 = AD^2 + DC^2$, et nous pouvons donc conclure, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ADC est rectangle en D. Donc l'angle $\widehat{ADC}$ est un angle droit.

2. L'énoncé nous indique que $(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$. Les droites (AB) et (CD) coupent donc la droite (AD) avec des angles égaux, donc $\widehat{BAD}$ est également un angle droit.

3. Dans le triangle DAC rectangle en D, on peut par exemple calculer le cosinus de l'angle $\widehat{DAC}$: $\cos\left(\widehat{DAC}\right) = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{4}{5} = 0,8$. Ainsi, $\boxed{\widehat{DAC} = \arccos(0,8)}$.

4. Dans le triangle ABC rectangle en C, [AB] est l'hypoténuse. On connaît le côté [AC] qui est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$, donc on peut écrire que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{AC}{AB}$. L'énoncé nous dit que $\widehat{BAC} \approx 53°$ et que $\cos(53°) \approx 0,6$, donc :

$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{AC}{AB} && \text{On remplace par les valeurs (approchée pour le cosinus)} \\ 0,6 &\approx \frac{5}{AB} && \times AB \\ 0,6AB &\approx 5 && \div 0,6 \\ AB &\approx \frac{5}{0,6} \end{aligned}$$

Ce qui donne donc $AB \approx \dfrac{5}{0,6} = \dfrac{50}{6} = \dfrac{25}{3} \approx \boxed{8,3}$.

BONUS Dans le quadrilatère $ABCD$, on connaît AD, DC, et une valeur approchée de AB. Pour avoir le périmètre, il ne nous manque qu'une valeur de BC. On peut ici utiliser la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\begin{aligned} \tan\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{BC}{AC} && \text{On remplace par les valeurs (approchée pour la tangente)} \\ 1,3 &\approx \frac{BC}{5} && \times 5 \\ 6,5 &\approx BC \end{aligned}$$

On en déduit donc une valeur approchée du périmètre : $4 + 3 + 6,5 + 8,3 = \boxed{21,8}$.

Exercice 3 — Calculs 3 points [1 + 1 + 1]

1. On peut reconnaître l'identité remarquable $((a + b)(a - b) = a^2 - b^2)$ ou bien appliquer la double distributivité :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \\ = \; & \sqrt{5} \times \sqrt{5} - \cancel{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} && \text{Double distributivité.} \\ = \; & 5 - 2 && \text{On simplifie.} \\ = \; & \boxed{3} && \text{On simplifie encore.} \end{aligned}$$

2. Il y a deux nombres dont le carré donne 3 : $\boxed{\sqrt{3} \text{ et } -\sqrt{3}}$.

3. • $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
   • $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
   • On en déduit que $5\sqrt{12} - \sqrt{75} = 5 \times 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (10 - 5)\sqrt{3} = \boxed{5\sqrt{3}}$

BONUS On peut tester à la main, se rendre compte que par exemple $10 \times 11 = 110$ (facile à calculer) qui est trop petit, et essayer ensuite 11×12 qui donne bien 132, donc ces deux nombres sont $\boxed{11 \text{ et } 12}$.