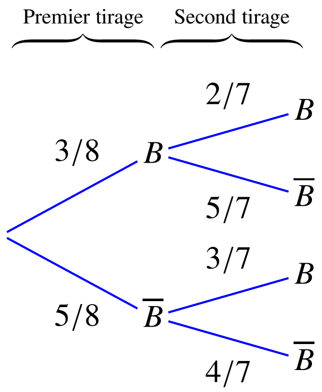
Exercice 1 — Tirage dans une urne 3,5 points [1,5 + 1 + 1]

Un jeu de hasard consiste à tirer, sans remise et au hasard, deux boules à la suite l'une de l'autre dans une urne fermée. Les boules sont indistinguables au toucher, et il y a au départ dans l'urne :

- 3 boules blanches
- 5 boules noires

1. Dans l'arbre de probabilité suivant (un étage par tirage), on note B le fait de tirer une boule blanche. Compléter cet arbre.



On considère dans les questions suivantes l'expérience aléatoire complète, où on tire les deux boules à la suite.

2. Quelle est la probabilité de l'événement E = "tirer deux boules blanches" ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement F = "tirer une seule boule blanche" ?

BONUS Décrire par une phrase l'événement G pour que les événements E, F et G forment un système exhaustif sur cette expérience aléatoire.

1. Voir l'arbre de probabilité plus haut : puisqu'il n'y a pas de remise, au second tirage il n'y a plus que 7 boules.
2. L'événement E est sur la branche du haut. $P(E) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \boxed{\frac{3}{28}}$.
3. L'événement F se trouve sur les deux branches du milieu. $P(F) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \boxed{\frac{15}{28}}$.

BONUS Pour obtenir toutes les possibilités il ne manque que l'événement $\boxed{\text{G = “obtenir deux boules noires”}}$.

Exercice 2 — Le restaurant 2,5 points

Au restaurant, tous les plats sont au même prix. Nous avons commandé quatre plats et une bouteille d'eau. Cela nous a coûté 51€. La table voisine a commandé cinq plats et deux bouteilles d'eau. Leur addition était de 66€.

En utilisant la méthode de votre choix, et en détaillant votre solution, donner le prix d'une bouteille d'eau, et le prix d'un plat.

BONUS Donner un exemple de problème similaire où on ne peut pas conclure directement sur les prix de la bouteille d'eau et du plat.

- Choix des inconnues : on note x le prix d'un plat et on note y le prix d'une bouteille d'eau.
- "Nous avons commandé quatre plats et une bouteille d'eau. Cela nous a coûté 51€." donne l'équation $\boxed{4x + y = 51}$.
  "La table voisine a commandé cinq plats et deux bouteilles d'eau. Leur addition était de 66€." donne l'équation $\boxed{5x + 2y = 66}$
- On a maintenant deux méthodes qu'on a vu en cours : graphiquement, on par substitution (et on peut aussi faire par combinaisons linéaires, même si on n'a pas approfondi, bien sûr). Il ne faut pas faire les deux méthodes bien sûr, mais je vous les donne toutes les deux pour vérifier.
- On résout graphiquement :

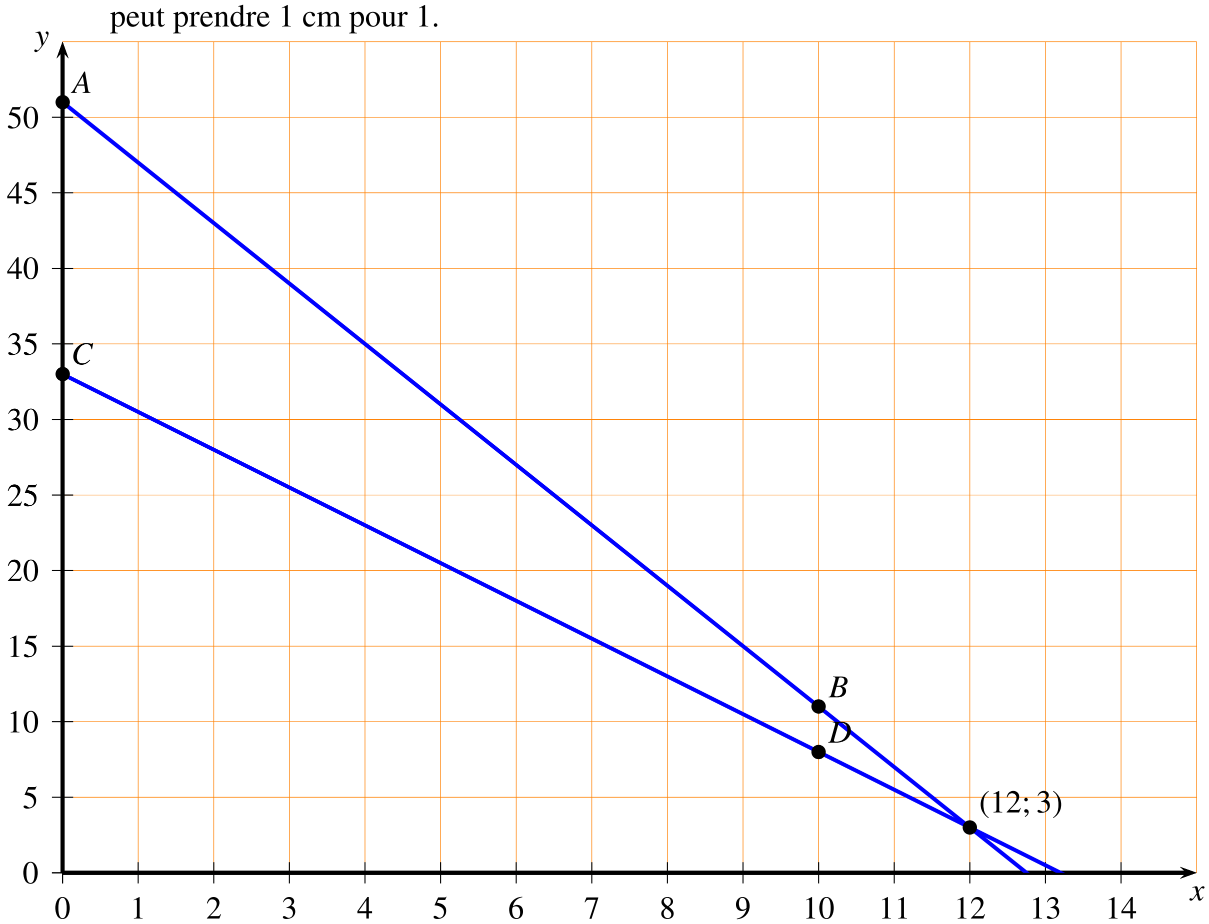
1. On met la première équation sous forme de fonction affine :

$$\begin{aligned} 4x + y &= 51 \\ y &= 51 - 4x \end{aligned} \quad -4x$$

2. On met la seconde équation sous forme de fonction affine :

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 66 \\ 2y &= 66 - 5x \\ y &= 33 - 2,5x \end{aligned} \quad \begin{aligned} &-5x \\ &\div 2 \end{aligned}$$

3. On trace le graphique :
   - ◇ Première fonction affine, il nous faut deux points. Pour $x = 0$, par exemple, on a $y = 51 - 4 \times 0 = 51$ donc le point $A(0; 51)$. Pour $x = 10$, par exemple, on a $y = 51 - 4 \times 10 = 11$ donc le point $B(10; 11)$.
   - ◇ Seconde fonction affine, il nous faut deux points. Pour $x = 0$, par exemple, on a $y = 33 - 2,5 \times 0 = 33$ donc le point $C(0; 33)$. Pour $x = 10$, par exemple, on a $y = 33 - 2,5 \times 10 = 8$ donc le point $D(10; 8)$.
   - ◇ Pour tracer, on a besoin d'aller jusqu'à 50 en y donc on prend 1 cm pour 5, et en x on peut prendre 1 cm pour 1.



4. On lit les coordonnées du point d'intersection : (12; 3), puis on conclut : le prix d'un plat est de $\boxed{12€}$ et celui d'une bouteille d'eau est de $\boxed{3€}$.

- On résout par substitution :
    1. On isole l'une des deux variables dans l'une des lignes (ici y dans la première équation, car y est déjà seul) :

$$\begin{cases} 4x + y = 51 \\ 5x + 2y = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 51 - 4x} \\ 5x + 2y = 66 \end{cases}$$

    2. On remplace cette variable dans l'autre équation et on résout :

$$\begin{cases} y = 51 - 4x \\ 5x + 2 \times (51 - 4x) = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 51 - 4x \\ 5x + 102 - 8x = 66 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y = 51 - 4x \\ -3x + 102 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 51 - 4x \\ -3x = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 51 - 4x \\ \boxed{x = 12} \end{cases}$$

    3. On remplace cette valeur dans la première équation :

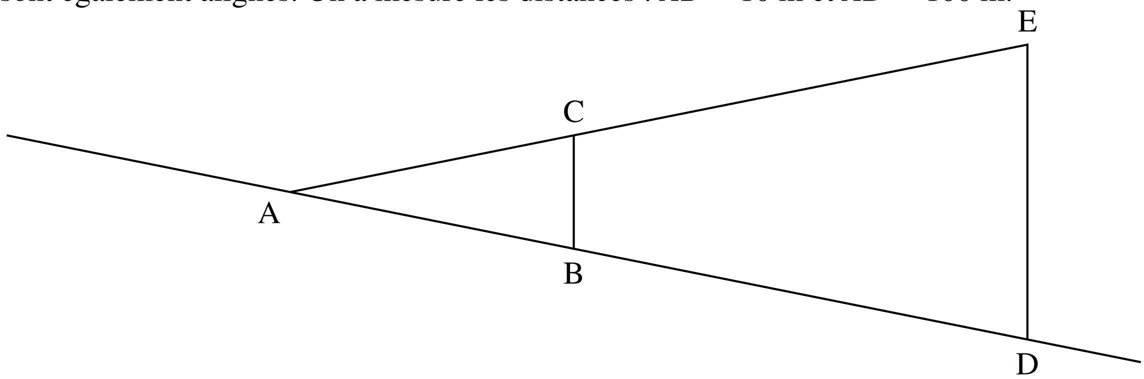
$$\begin{cases} y = 51 - 4 \times 12 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 51 - 48 \\ x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y = 3} \\ x = 12 \end{cases}$$

- On vérifie, puis on conclut : le prix d'un plat est de $\boxed{12€}$ et celui d'une bouteille d'eau est de $\boxed{3€}$.

BONUS Si on avait eu par ex. une table à 4 plats + 1 bouteille à 51€ et une autre table à 8 plats + 2 bouteilles à 102€ (tout multiplié par deux), ça nous aurait donné deux fois la même équation et donc on n'aurait pas pu conclure. Si on avait eu deux tables avec les mêmes commandes mais des prix différents on n'aurait pas pu conclure non plus (on aurait pu quand même dire qu'il y a sûrement une erreur sur l'une des additions cela dit).

Exercice 3 — La hauteur de l'immeuble 4 points [2 + 1 + 1]

Dans une rue en pente se trouvent une personne et un immeuble. La situation est modélisée par la figure suivante, qui n'est pas à l'échelle. La personne de 1,7 m de haut est modélisée par le segment $[BC]$, et l'immeuble est modélisé par le segment $[DE]$. La personne et l'immeuble sont tous les deux verticaux. Les points A, B et D sont alignés (ils sont sur la rue), et les points A, C et E sont également alignés. On a mesuré les distances : $AB = 10$ m et $AD = 100$ m.

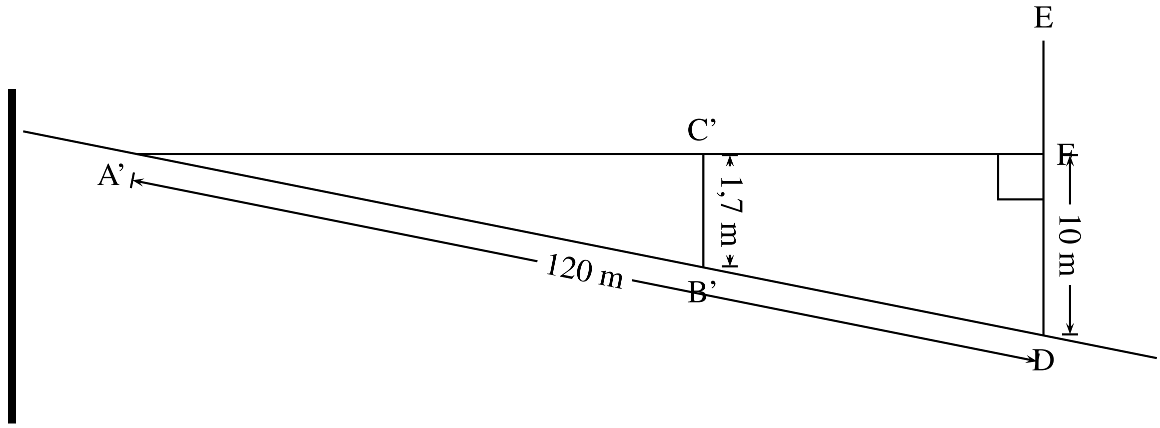


1. Calculer la hauteur de l'immeuble, c'est-à-dire la longueur DE.

La personne dans la rue a bougé (elle se trouve dorénavant en $[B'C']$). Une personne dans l'immeuble regarde depuis le point F (à 10 m de hauteur depuis le bas de l'immeuble). Elle voit droit devant elle (à l'horizontale) le point C', et plus loin derrière, le point A' sur la rue. On a calculé $A'D = 120$ m.

2. Reporter les données connues sur le schéma, puis montrer que $A'B' = 20,4$ m.
3. De quelle distance la personne de la rue s'est-elle déplacée (par rapport au premier schéma) ?

BONUS Calculer la longueur $A'F$.



1. Sur la figure, on sait que $\begin{cases} A, B, D \text{ sont alignés} \\ A, C, E \text{ sont alignés} \\ (BC) \mathbin{/\!/} (DE) \end{cases}$ On peut donc appliquer le théorème de Thalès (le triangle ADE est un agrandissement de ABC), et on a donc l'égalité des rapports :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$
On remplace par ce qu'on connaît
$$\frac{10}{100} = \frac{1,7}{DE}$$
Égalité des produits en croix
$$DE = \frac{100 \times 1,7}{10}$$
On calcule
$$\boxed{DE = 17}$$

2. On a reporté les données sur le schéma. Sur la figure, on sait que $\begin{cases} A', B', D \text{ sont alignés} \\ A', C', F \text{ sont alignés} \\ (B'C') \mathbin{/\!/} (DF) \end{cases}$

On peut donc appliquer le théorème de Thalès (le triangle $A'DF$ est un agrandissement de $A'B'C'$), et on a donc l'égalité des rapports :

$$\frac{A'C'}{A'F} = \frac{A'B'}{A'D} = \frac{B'C'}{DF}$$
On remplace par ce qu'on connaît
$$\frac{A'B'}{120} = \frac{1,7}{10}$$
Égalité des produits en croix
$$A'B' = \frac{120 \times 1,7}{10}$$
On calcule
$$\boxed{DE = 20,4}$$

3. Dans le premier schéma $BD = AD - AB = 90$ m, et dans ce second schéma $B'D = A'D - A'B' = 99,6$ m. La personne a donc bougé $\boxed{\text{de } 9,6 \text{ m vers le haut de la rue}}$.

BONUS Le triangle $A'FD$ est rectangle en F (c'est codé sur le schéma, et ça vient du fait que l'immeuble est vertical alors que la personne regarde droit devant, selon une ligne horizontale). On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$A'D^2 = A'F^2 + DF^2$$
On remplace par ce qu'on connaît
$$120^2 = A'F^2 + 10^2$$
On calcule
$$14\,400 = A'F^2 + 100$$
-100
$$14\,300 = A'F^2$$
On utilise la racine carrée
$$\boxed{\sqrt{14\,300} = A'F}$$

On en déduit une valeur approchée si on voulait : $A'F = \sqrt{14\,300} \approx \boxed{119,6\ m}$.