

3. Pour résoudre une équation de ce type, la méthode à connaître est de faire le changement de variable $X = \cos(x)$ pour aboutir à une équation du 2nd degré.

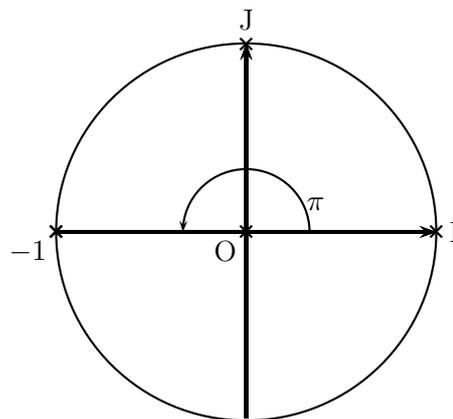
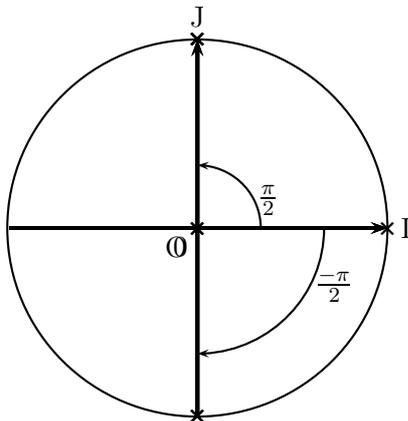
$$\cos^2(x) + \cos(x) = 0$$

$$X^2 + X = 0 \quad \left. \vphantom{X^2 + X = 0} \right\} \text{On pose } X = \cos(x)$$

Ici on peut factoriser par X ce qui donne $X(X + 1) = 0$ ou bien sinon calculer le discriminant : les coefficients sont $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 + 0 = 1$. Donc on a deux solutions

$$X_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 1}{2} \text{ c'est-à-dire } 0 \text{ et } -1.$$

Maintenant qu'on a trouvé les solutions avec la variable $X = \cos(x)$, il faut trouver les solutions avec la variable x . On est donc ramenés à deux équations : $X = 0$ demande de résoudre $\cos(x) = 0$ (à gauche) et $X = -1$ demande de résoudre $\cos(x) = -1$ (à droite).



Ici, il y a deux solutions dans $[0; 2\pi]$: $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Ici, il y a une solution dans $[0; 2\pi]$: π .

Au final, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Exercice A3 — Probabilités

6 points

	Une expérience aléatoire consiste à jeter en même temps deux dés bien équilibrés. Chacun de ces dés a 6 faces numérotées de 1 à 6.
1 point	1. Donner le nombre d'issues possibles de cette expérience.
2 points	2. Calculer les probabilités des événements suivants, en exprimant les résultats sous forme de fraction :
2 points	G = « Aucun 3 n'a été obtenu » ;
1 point	I = « La somme des résultats est divisible par 4 ou strictement plus grande que 10 ».
1 point	3. Décrivez un événement impossible pour cette expérience aléatoire.

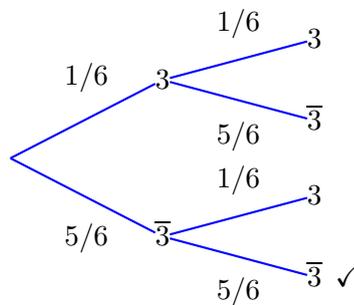
1. Chaque dé a 6 faces. Si on a un moyen de distinguer les 2 dés (par exemple, s'ils ont chacun un trait distinctif comme la couleur, la taille...) alors on a 36 issues différentes : le premier dé donne "1" et le second donne "2" sera noté (1; 2), les 36 issues sont les couples d'entiers entre 1 et 6

$$(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), \dots$$

Ces 36 issues sont équiprobables.

Remarque : Si on n'a aucun moyen de distinguer les deux dés, alors ce qu'on voit c'est simplement un multi-ensemble de deux nombres entre 1 et 6. On n'a aucun moyen de distinguer $\{1; 2\}$ de $\{2; 1\}$ qui est du coup traité comme une seule issue, ainsi on n'a plus que 21 issues différentes (mais cette fois, les 21 issues ne sont pas équiprobables donc plus moyen de faire de calcul comme nombre d'issues favorables sur nombre d'issues au total...)

2. Pour l'événement G, on peut faire un arbre à deux étages (un étage par dé), en séparant le fait d'obtenir un 3 ou pas :



La seule branche qui correspond à l'événement G est celle du bas, sa probabilité est de $P(G) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Remarque : on pouvait aussi dire, sans faire d'arbre, que les événements « ne pas obtenir un 3 sur le premier dé » et « ne pas obtenir un 3 sur le second dé » sont indépendants, et calculer directement la probabilité de G comme le produit des deux probabilités.

Pour l'événement I , on peut écrire un tableau à double entrée répertoriant toutes les sommes différentes. Ensuite, on a mis en rouge les issues qui correspondent à I :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On voit dans le tableau qu'on a 11 issues favorables sur 36 issues en tout, d'où $P(I) = \frac{11}{36}$.

3. Pour cette expérience aléatoire, il est impossible d'obtenir une somme égale à 13, il est impossible d'obtenir un 7 sur l'un des dés, il est impossible de faire exploser la planète, il est impossible de se transformer en grenouille...

Exercice B1 — Modèles et formules quadratiques

16 points

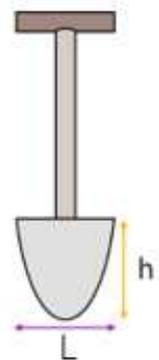
Nous souhaitons modéliser le contour arrondi de la partie plate de la pelle ci-contre par une fonction f du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On sait que la largeur L de cette partie plate est 20 cm plus petite que sa hauteur h et que le carré de la largeur fait 18 fois la hauteur.

1. On admet que l'énoncé peut être traduit en l'équation suivante :

$$h^2 - 40h + 400 = 18h$$



4 points

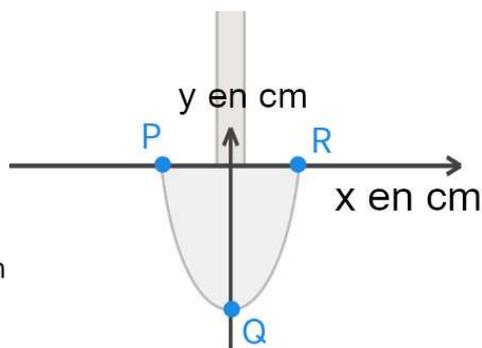
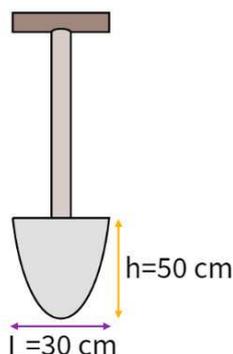
- (a) Résoudre cette équation.

2 points

- (b) Parmi les deux solutions trouvées à la question précédente, une seule peut correspondre à la hauteur h cherchée. Laquelle et pourquoi ?

2 points

2. En utilisant les informations des figures suivantes, donner les coordonnées des points P et Q :



2 points	3. À l'aide des coordonnées du sommet de la parabole, déterminer une expression de la forme canonique de f (cette expression fera encore apparaître a).
4 points	4. En utilisant le fait que R est sur la courbe de f , calculer a et exprimer le résultat sous forme fractionnaire.
2 points	5. Dédurre des questions précédentes une expression de $f(x)$.

1. (a) Afin de résoudre l'équation $h^2 - 40h + 400 = 18h$, on va faire apparaître la forme que l'on connaît bien $ah^2 + bh + c = 0$.

$$\begin{array}{l} h^2 - 40h + 400 = 18h \\ h^2 - 58h + 400 = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -18h$$

Dans cette équation, $a = 1$, $b = -58$ et $c = 400$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-58)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 1\,764$. Donc on a deux solutions $x_{\pm} = \frac{-(-58) \pm \sqrt{1\,764}}{2 \times 1} = \frac{58 \pm 42}{2} = 29 \pm 21$, c'est-à-dire $\boxed{S = \{8; 50\}}$.

(b) L'énoncé nous indique que $L = h - 20$, du coup ce n'est pas possible que h vaille 8 (cela donnerait $L = -12$). Du coup, $\boxed{\text{c'est forcément } h = 50}$.

2. Sur la figure de droite, on voit que P et R sont sur l'axe des abscisses, et que l'origine est le milieu de [PR]. Sur la figure de gauche, on voit que $L = 30$ donc $PR = 30$, ainsi $\boxed{P(-15; 0) \text{ et } R(15; 0)}$. Enfin, la figure de gauche indique que $h = 50$, donc le point Q, sur l'axe des ordonnées, a pour coordonnées $\boxed{Q(0; -50)}$.

3. La parabole a pour sommet Q, donc la forme canonique de f s'écrit :

$$f(x) = a(x - 0)^2 - 50 = \boxed{ax^2 - 50}$$

4. Pour trouver la valeur de a , on utilise le point R(15; 0). Effectivement on sait alors que :

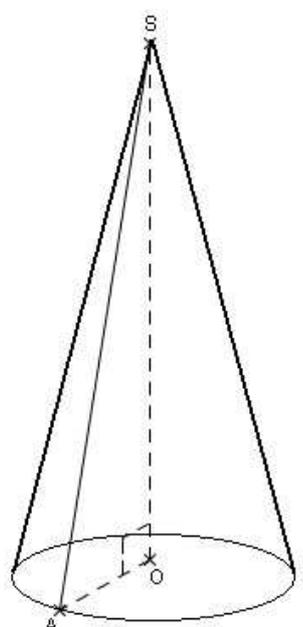
$$\begin{array}{l} f(15) = 0 \\ a(15)^2 - 50 = 0 \\ 225a - 50 = 0 \\ 225a = 50 \\ a = \frac{50}{225} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{On remplace } x \text{ par } 15 \text{ dans l'expression de } f(x) \\ \text{On simplifie} \\ +50 \\ \div 225 \end{array}$$

Ainsi on trouve $\boxed{a = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}}$.

5. En remplaçant a par sa valeur, on trouve donc $\boxed{f(x) = \frac{2}{9}x^2 - 50}$.

Exercice B2 — Longueurs et distances dans les objets 3D

12 points

	<p>On considère une bougie dont la forme est un cône de révolution, représentée ci-contre (la figure n'est pas aux dimensions réelles.).</p> <p>Le rayon OA de sa base est 2,5 cm.</p> <p>La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.</p>	
1 point	1. Sans justifier, donner la nature du triangle SAO.	
3 points	2. Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm.	
3 points	3. Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie. On donnera la valeur arrondie au dixième de cm^3 .	
	N.B. : la formule du volume d'un cône de révolution est	
	$V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$	
5 points	4. Déterminer l'angle \widehat{ASO} . On donnera la valeur arrondie au degré.	

1. D'après le codage de la figure, $\boxed{\text{SAO est rectangle en O}}$.

2. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle, ce qui donne, en centimètres :

$$SA^2 = SO^2 + AO^2$$

$$6,5^2 = SO^2 + 2,5^2 \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{On remplace par les valeurs}$$

$$6,5^2 - 2,5^2 = SO^2 \quad \leftarrow -2,5^2$$

$$36 = SO^2 \quad \leftarrow \text{On calcule}$$

$$\pm 6 = SO \quad \leftarrow \text{On résout}$$

Du coup, puisque SO est une longueur, on déduit que c'est la solution positive : $\boxed{SO = 6 \text{ cm}}$.

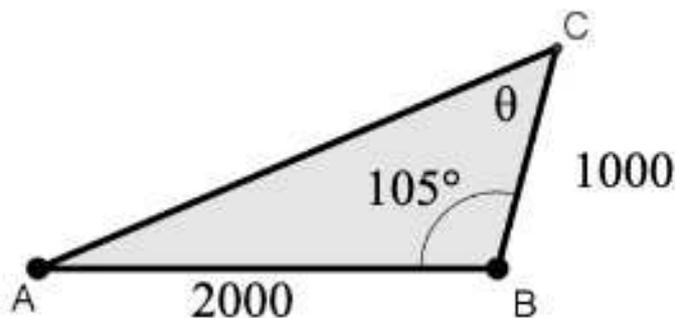
3. Pour appliquer la formule, on remarque qu'ici, en centimètres, $r = OA = 2,5$ et $h = SO = 6$. Donc $\mathcal{V} = \frac{\pi 2,5^2 \times 6}{3} \approx 39,3$. Donc il faut environ $\boxed{39,3 \text{ cm}^3 \text{ de cire}}$.

4. Dans le triangle SAO rectangle en O, pour l'angle \widehat{ASO} , AO correspond à la longueur du côté opposé, SO à celle du côté adjacent, SA à l'hypoténuse. On peut utiliser la relation trigonométrique de notre choix. Par exemple $\sin(\widehat{ASO}) = \frac{AO}{SA} = \frac{2,5}{6,5}$ d'où $\widehat{ASO} = \arcsin\left(\frac{2,5}{6,5}\right) \approx \boxed{23^\circ}$ (on peut prendre l'arcsinus car dans un triangle rectangle les autres angles sont $< 90^\circ$).

Exercice B3 — Formules dans un triangle quelconque

16 points

Le parcours d'une régates est formé d'un triangle ABC matérialisé par trois bouées.
Les longueurs sont exprimées en mètres.



4 points

1. Montrer que l'aire du triangle est de 965 926 m² arrondi à 1 m² près.

5 points

2. Montrer que la longueur AC est de 2 457 m arrondi à 1 m près.

5 points

3. Déterminer $\sin(\theta)$ puis donner la valeur de de l'angle θ (arrondir à 1° près).

2 points

4. Donner le périmètre du triangle ABC et interpréter cette distance.

1. On peut appliquer la formule de l'aire d'un triangle :

$$\mathcal{A}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin(\widehat{\text{ABC}}) \approx 965\,926$$

2. On ne connaît qu'un seul angle dans le triangle, donc la formule d'al-Kashi va nous donner la réponse :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{\text{ABC}}) \approx 6\,035\,276,180410083$$

$$\text{Du coup } AC \approx \sqrt{6\,035\,276,180410083} \approx 2\,457.$$

3. Pour trouver $\sin(\theta)$ puis θ , on va appliquer la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\widehat{\text{ABC}})}{AC} = \frac{\sin(\theta)}{AB}$$

$$\frac{\sin(105^\circ)}{2\,457} \approx \frac{\sin(\theta)}{2000}$$

$$\frac{2000 \sin(105^\circ)}{2\,457} \approx \sin(\theta)$$

$$\frac{2000 \sin(105^\circ)}{2\,457} \approx \sin(\theta)$$

$$\boxed{0,786264409 \approx \sin(\theta)}$$

On remplace par ce qu'on connaît

$\times 2000$

Valeur approchée

\arcsin

$$51,837772313^\circ \text{ ou } 128,162227687^\circ \approx \theta$$

Comme $\widehat{ABC} = 105^\circ$, et que la somme des angles fait 180° , la seule valeur possible est donc $\theta \approx 52^\circ$.

Remarque : On aurait dû utiliser la valeur exacte de AC, soit $\sqrt{5000000 - 4000000 \cos(105^\circ)}$ (au lieu d'utiliser la valeur approchée 2 457), mais à un degré près, ça ne changeait pas le résultat.

4. Le périmètre vaut $AB + BC + CA \approx 2000 + 1000 + 2\,457 \approx 5\,457$. Ainsi, le parcours de la régata mesure $5\,457$ m.

Exercice B4 — Modèles périodiques

6 points

	La température mensuelle d'une région, en °C, est modélisée par la fonction :
	$T(x) = 19,5 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 7)\right) + 0,5$
	où x est le rang du mois dans l'année (en janvier, $x = 1$).
2 points	1. Montrer que la période de cette fonction est 12.
1 point	2. Déterminer la température mensuelle minimale.
3 points	3. Déterminer la température mensuelle en décembre.

La fonction $T(x) = 19,5 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 7)\right) + 0,5$ est une fonction sinusoïdale.



Attention, pour les fonctions cosinus / sinus / tangente, c'est toujours en radians !

1. On peut retenir que pour une fonction de la forme $f(x) = a \sin(b(x + c)) + d$, la période est $\frac{2\pi}{b}$, donc ici ça donne $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \times \frac{6}{\pi} = \boxed{12}$.

Sinon, on pouvait aussi vérifier que $T(x + 12) = T(x)$, ce qui implique que, puisque T n'est pas une fonction constante, c'est une fonction périodique dont 12 est un multiple de la période (et on n'aurait pas demandé davantage... démontrer que 12 est la plus petite valeur > 0 vérifiant cette propriété est difficile).

2. L'énoncé nous invite à penser que la fonction n'est utile que pour des valeurs de x entières. Ainsi, on peut faire un tableau des 12 valeurs utiles de T , et regarder la plus petite :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$T(x)$	-19	-16,4	-9,25	0,5	10,25	17,4	20	17,4	10,25	0,5	-9,25	-16,4

Du coup la température mensuelle minimale est de $\boxed{-19^\circ\text{C}}$ (atteinte en janvier).

Sinon on peut par exemple encadrer les valeurs en démarrant par le fait que les valeurs de cosinus sont toujours entre -1 et 1 :

$$\begin{array}{l}
 -1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 7)\right) \leq 1 \\
 -19,5 \leq 19,5 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 7)\right) \leq 19,5 \\
 -19 \leq 19,5 \cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 7)\right) + 0,5 \leq 20
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \times 19,5 \\ + 0,5 \end{array}$$

Donc la valeur minimale de T est de $\boxed{-19}$ (les valeurs de l'encadrement sont atteintes à chaque fois).

3. Ici, on demande de calculer $T(12)$. Voici le détail du calcul :

$$19,5 \cos\left(\frac{\pi}{6}(12 - 7)\right) + 0,5 = 19,5 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 0,5 = 19,5 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + 0,5 \approx -16,4 \text{ donc } \boxed{-16,4^\circ\text{C}} \text{ (bien sûr si on avait fait un tableau de valeurs en 1) on avait déjà la réponse).}$$

Marie s'est abonnée à deux services de vidéo à la demande : Matflix et PI TV+. Un soir de libre, elle décide d'inviter son amie Catherine à regarder des séries de science-fiction. Catherine arrive bientôt, donc Marie commence à chercher une série intéressante.

La probabilité qu'elle choisisse Matflix est de 80%.

Si elle choisit Matflix, la probabilité qu'elle trouve une série intéressante avant l'arrivée de Catherine est de 40%.

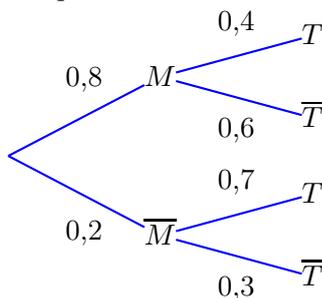
Si elle choisit PI TV+, cette probabilité est de 70%.

Dans la suite de l'énoncé, on note :

- M = « Marie choisit Matflix »
- T = « Marie trouve une série intéressante avant l'arrivée de Catherine »

- | | |
|----------|---|
| 4 points | 1. Faire un arbre pour illustrer la situation. |
| 3 points | 2. Calculer la probabilité de l'événement « Marie choisit Matflix mais Catherine arrive avant que Marie ne trouve une série intéressante ». |
| 3 points | 3. Quelle est la probabilité que Marie trouve une série intéressante avant que Catherine n'arrive? |
| 4 points | 4. Quelle est la probabilité que Marie ait choisi Matflix si l'on sait que Catherine est arrivée avant que Marie ne trouve une série intéressante? Donner le résultat avec une précision de deux décimales. |
| 2 points | 5. Est-ce que les événements M et T sont indépendants? Justifier. |

1. On peut modéliser la situation par l'arbre de probabilités suivant :



2. On nous demande ici la probabilité de l'événement $M \cap \bar{T}$, qui est la deuxième branche de l'arbre. Donc $P(M \cap \bar{T}) = 0,8 \times 0,6 = \boxed{0,48}$.
3. On nous demande ici la probabilité de l'événement T , qui est sur la première et la troisième branche de l'arbre. Donc $P(T) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,7 = \boxed{0,46}$.
4. On nous demande ici la probabilité de l'événement M , sachant l'événement \bar{T} . On calcule à l'aide de la formule $P_{\bar{T}}(M) = \frac{P(\bar{T} \cap M)}{P(\bar{T})} = \frac{0,48}{1 - 0,46} \approx \boxed{0,89}$.
5. M et T ne sont pas indépendants car l'énoncé nous dit que $P_M(T) = 0,4$ alors que $P_{\bar{M}}(T) = 0,7$, qui sont donc deux nombres différents.

On pouvait aussi dire que $P_{\bar{T}}(M)$, qu'on vient de calculer, est différent de $P(M)$, ou encore que $P(T \cap M)$ est différent de $P(T) \times P(M)$...