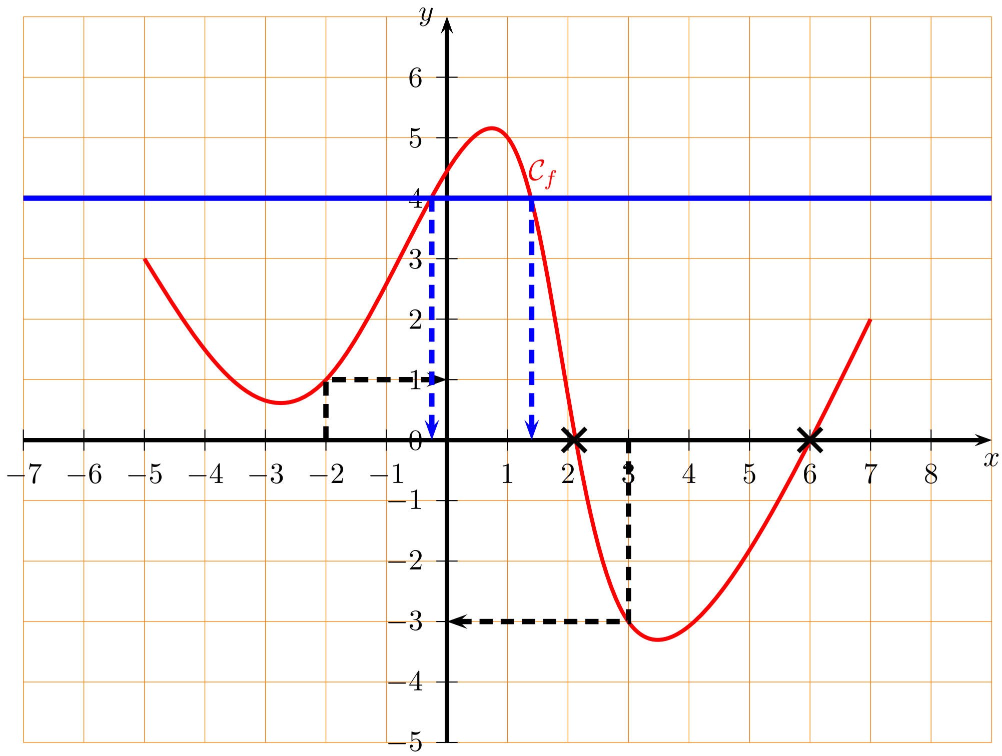
Exercice A1 **6 points**

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f :



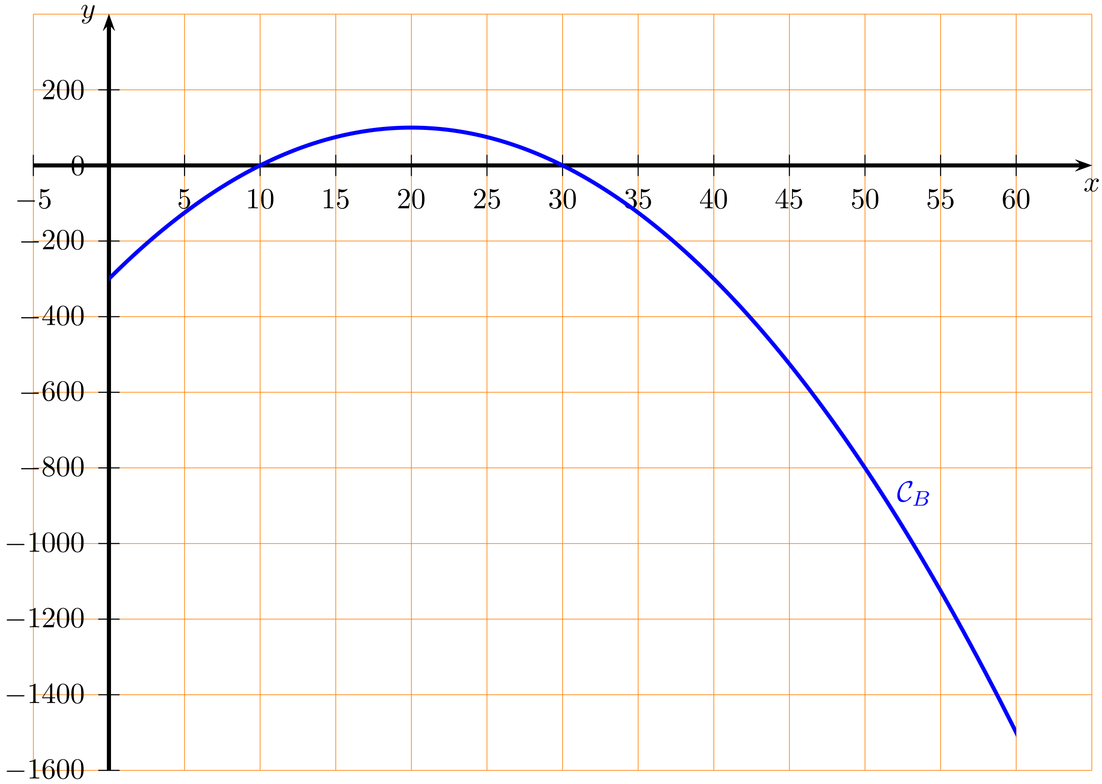
1. **Lire** graphiquement le domaine de définition de f.	1 point
2. **Lire** graphiquement l'ensemble image de f.	1 point
3. **Lire** graphiquement $f(3)$.	1 point
4. **Lire** graphiquement l'image de -2 par f.	1 point
5. **Lire** graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$.	1 point
6. **Lire** graphiquement l'ensemble des racines de f.	1 point

1. On lit $\boxed{\mathcal{D}_f = [-5; 7]}$, car la courbe démarre à $x = -5$ et finit à $x = 7$.
2. L'ensemble image de f est $\boxed{\mathcal{I}m(f) = [-3,2; 5,1]}$, car il y a des points sur la courbe de $y = -3,2$ (environ) à $y = 5,1$ (environ).
3. On lit $\boxed{f(3) = -3}$ (voir les traits de construction noirs pointillés).
4. On lit $\boxed{f(-2) = 1}$ (voir les traits de construction noirs pointillés).
5. On lit $\boxed{\mathcal{S} = \{-0,25; 1,4\}}$ (voir les traits de construction bleus).
6. Les racines de f se lisent comme l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (c'est là où $f(x) = 0$, voir les croix). On lit $\boxed{\{2,1; 6\}}$.

Exercice A2 **4 points**

Une entreprise fabrique des objets. Le coût $C(x)$, en milliers d'euros, pour produire x milliers d'objets, est donné par la relation $C(x) = x^2 - 30x + 300$, avec x entre 0 et 60.

1. **Calculer** le coût, en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit 10 milliers d'objets. — 1 point
2. Le coût de production de 2 000 objets est de 244 000 euros. **Interpréter** cette valeur par rapport au résultat de la question 1. — 1 point
3. Le bénéfice $B(x)$, en milliers d'euros, pour la production et la vente de x milliers d'objets, est donné par le graphique suivant :



   (a) **Déterminer** pour quelle(s) quantité(s) d'objets produits et vendus le bénéfice est positif. — 1 point

   (b) **Donner** le maximum de la fonction B. **Déterminer** la quantité d'objets produits et vendus qui atteint le bénéfice maximum. — 1 point

1. Il faut calculer $C(10)$ donc remplacer x par 10 dans l'expression. Cela donne $C(10) = 10^2 - 30 \times 10 + 300 = 100 - 300 + 300 = 100$. Donc le coût lorsque l'entreprise produit 10 milliers d'objets est de $\boxed{\text{100 milliers d'euros}}$.
2. Le coût de production de 2 000 objets de 244 000 euros est donc inférieur au coût de production de 10 000 objets ! On produit moins d'objets mais pour plus d'argent, c'est contre-intuitif.
3. (a) Graphiquement, le bénéfice est positif quand la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc pour $x \in [10; 310]$, c'est-à-dire pour un nombre d'objets produits et vendus $\boxed{\text{entre 10 000 et 30 000}}$.

   (b) Le maximum de la fonction B est de $\boxed{100}$ (ordonnée du point le plus haut). Ce bénéfice (qui est donc de 100 000€) est atteint pour $x = 20$, c'est-à-dire pour $\boxed{\text{20 000 objets produits et vendus}}$.

Exercice A3 **5 points**

Un dé bien équilibré a 6 faces numérotées 1, 1, 2, 2, 3, 3.
Un joueur lance ce dé deux fois et ajoute les nombres obtenus pour calculer un score. En utilisant un tableau à 2 dimensions ou n'importe quelle autre méthode :

1. **Calculer** la probabilité que le score final soit de 4. — 2 points
2. Sachant que le premier lancer a donné un nombre pair, **calculer** la probabilité que le score final soit impair. — 3 points

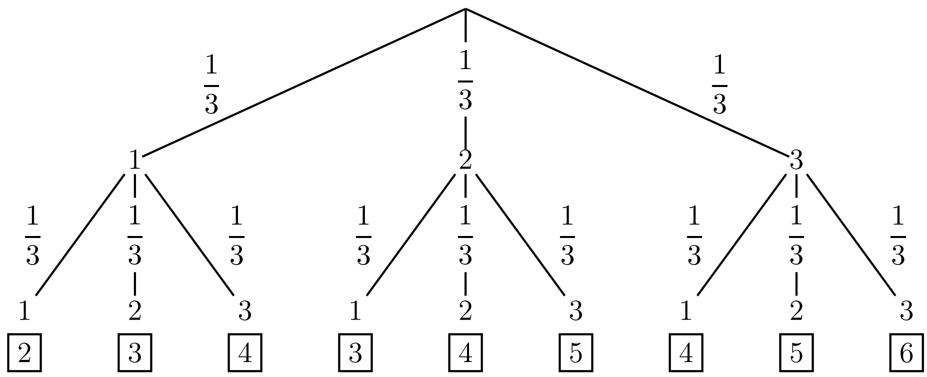
Notons A = « le score final est de 4 » ; B = « le score final est impair » et C = « le premier lancer a donné un nombre pair ».

Pour cet exercice, on pouvait par exemple dessiner un tableau à double entrée, ou bien également faire un arbre de probabilités. Le tableau ci-dessous récapitule toutes les possibilités sur les deux lancers. Ensuite, on a mis en rouge les issues qui correspondent à A, en bleu les issues qui correspondent à B :

Dé 1 \ Dé 2	1	1	2	2	3	3
1	2	2	3	3	4	4
1	2	2	3	3	4	4
2	3	3	4	4	5	5
2	3	3	4	4	5	5
3	4	4	5	5	6	6
3	4	4	5	5	6	6

1. $P(\mathrm{A}) = \dfrac{12}{36} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ (12 cas favorables sur les 36 cas au total).
2. $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B}) = \dfrac{8}{12} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ (8 cas favorables sur les 12 cas qui correspondent au premier dé pair).

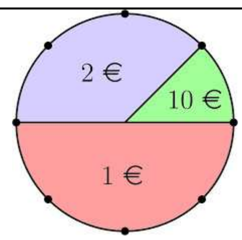
Avec un arbre, on aura deux étages (deux lancers de dés). Puisque le dé est bien équilibré, la probabilité de tomber sur le 1 est de $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ (2 faces sur 6), idem pour tomber sur le 2 et tomber sur le 3.



1. $P(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ (la somme 4 est sur 3 branches).
2. $P(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$ (il y a 2 branches qui correspondent à avoir un premier lancer pair et un résultat impair) et $P(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{3}$ (on peut calculer ça directement sans l'arbre, c'est la probabilité de faire 2 qu'on a déjà détaillée plus haut). Donc $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{C} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{C})} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{1} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

Exercice A4 **5 points**

Un joueur joue à un jeu dont la mise est de 3€. Il tourne une fois la roue de la fortune à droite, puis gagne un montant dépendant du secteur du disque dans lequel la roue s'arrête. Les probabilités d'arrêt de la roue sont proportionnelles aux angles des secteurs correspondants.
On appelle X la variable aléatoire qui correspond au bénéfice du joueur.



1. **Déterminer** la loi de probabilité de X. — 2 points
2. **Montrer** par le calcul que le jeu n'est pas équitable. — 2 points
3. **Changer** le montant en euros sur le secteur rouge pour rendre le jeu équitable (la mise est toujours de 3€). — 1 point

1. X représente le bénéfice du joueur, donc -2€ dans le secteur rouge (probabilité $\dfrac{1}{2}$, c'est la moitié du disque), -1€ dans le secteur bleu (probabilité $\dfrac{3}{8}$, c'est 3 huitièmes de disque) et 8€ dans le secteur vert (probabilité $\dfrac{1}{8}$, c'est 1 huitième de disque). Donc la loi de probabilité de X est :

x_i	-2	-1	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Pour savoir si le jeu est équitable, il faut savoir si $E(X) = 0$. On va donc calculer :
$E(X) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \cdots + x_n \cdot p(x_n) = -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{3}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} = -1 - \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{-8-3+7}{8} = \boxed{-\frac{1}{2}}$.
Donc le jeu n'est pas équitable.
3. Il faut trouver un nouveau bénéfice b pour que l'espérance de X soit 0. Avec cette inconnue, la loi s'écrit :

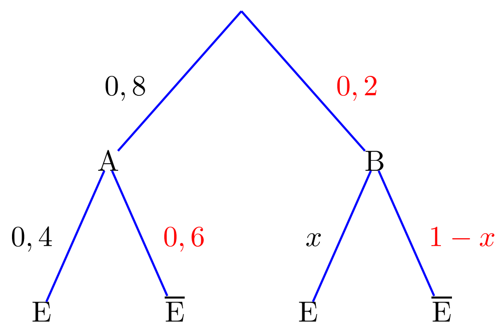
x_i	b	-1	7
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On va donc calculer :
$E(X) = b \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{3}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} = \frac{b}{2} - \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{4b}{8} - \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{4b-3+7}{8} = \frac{4b+4}{8}$. Il faut donc que $4b + 4 = 0$, c'est-à-dire $4b = -4$ donc $b = -1$. Pour que le bénéfice soit de -1€ sur le secteur rouge, le montant du gain sur ce secteur doit donc être de $\boxed{2\text{€}}$.

Exercice B1 **5 points**

Dans une ville, les personnes qui ont un vélo l'ont acheté à l'une des entreprises A et B qui fabriquent chacune des vélos. Certains de ces vélos sont électriques, d'autres non.
Si on prend un vélo au hasard dans cette ville, tout au long de l'énoncé on notera :
A = « le vélo vient de l'entreprise A »
B = « le vélo vient de l'entreprise B »
E = « le vélo est électrique »
On connaît $P(\mathrm{A}) = 0,8$ et $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}) = 0,4$. On ne connaît pas $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{E})$, et on notera donc x cette probabilité.

1. **Remplir** l'arbre de probabilités suivant : — 1.5 point



2. **Montrer** que $P(\mathrm{E}) = 0,32 + 0,2x$. — 1 point

Une étude statistique permet de prouver que $P(\mathrm{E}) = 0,42$, et on utilisera à présent cette valeur dans les calculs.

3. **Trouver** la valeur de x. — 1.5 point
4. **Calculer** la probabilité qu'un vélo pris au hasard provienne de l'entreprise A, sachant qu'il est électrique. — 1 point

1. L'arbre a été complété en rouge.
2. $P(\mathrm{E}) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times x = 0,32 + 0,2x$ (l'événement E est sur deux branches).
3. On sait que $P(\mathrm{E}) = 0,32 + 0,2x$ et que $P(\mathrm{E}) = 0,42$, donc on doit résoudre l'équation :
$$\begin{aligned} 0,32 + 0,2x &= 0,42 && \quad -0,32 \\ 0,2x &= 0,1 && \quad \div 0,2 \\ x &= \boxed{0,5} \end{aligned}$$
4. On cherche $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{E} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{E})} = \frac{0,8 \times 0,4}{0,42} = \frac{0,32}{0,42} = \boxed{\frac{16}{21} \approx 0,76}$.

Exercice B2 **5 points**

Une étude a permis de conclure, pour une certaine quantité d'alcool consommée, que le taux d'alcool (en grammes par litre de sang) dans le sang, t heures après avoir consommé cette quantité d'alcool, peut être donné par la fonction A définie de la manière suivante :

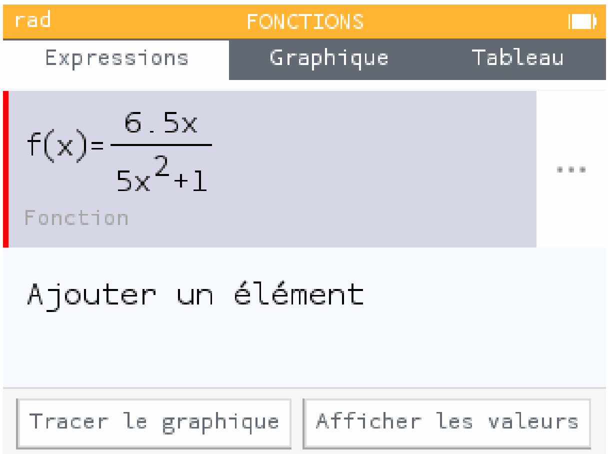
$$A(t) = \frac{6,5t}{5t^2+1} \qquad \text{pour } t \text{ entre } 0 \text{ et } 10$$

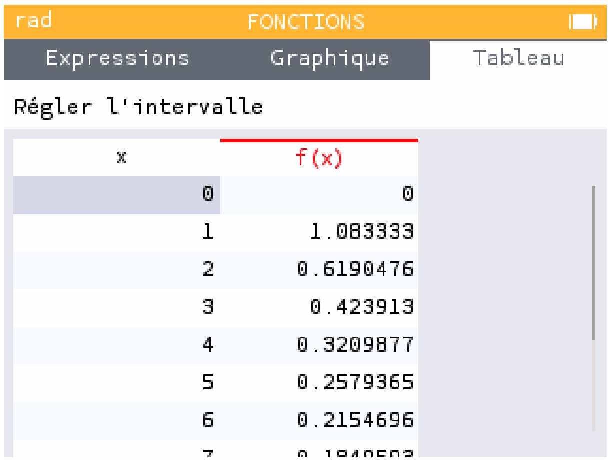
1. **Recopier et compléter** le tableau de valeurs suivant. Arrondir les résultats au centième : — 2 points

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(t)$	0	1,08	0,62	0,42	0,32	0,26	0,22	0,18	0,16	0,14	0,13

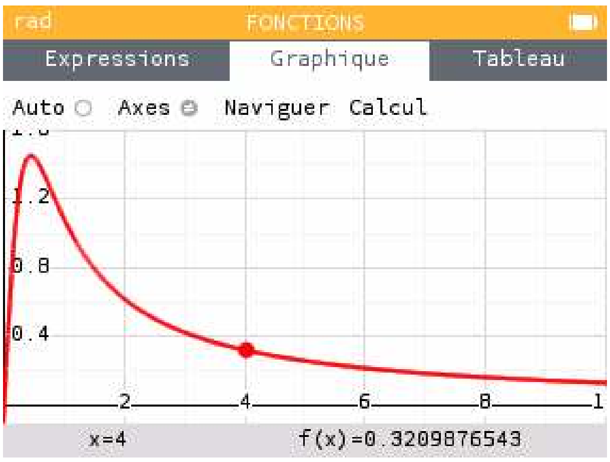
2. **Donner** l'allure du graphique de la fonction A. — 2 points
3. En Belgique, le taux maximal autorisé pour rouler après avoir consommé de l'alcool est de 0,5 g/l. Une personne a bu la même quantité d'alcool que dans l'étude. **Déterminer** si celle-ci peut prendre la voiture 3h45 après avoir consommé l'alcool. — 1 point

1. Le tableau a été complété, on a rentré l'expression (avec x et non pas t) et demandé une table de valeurs :

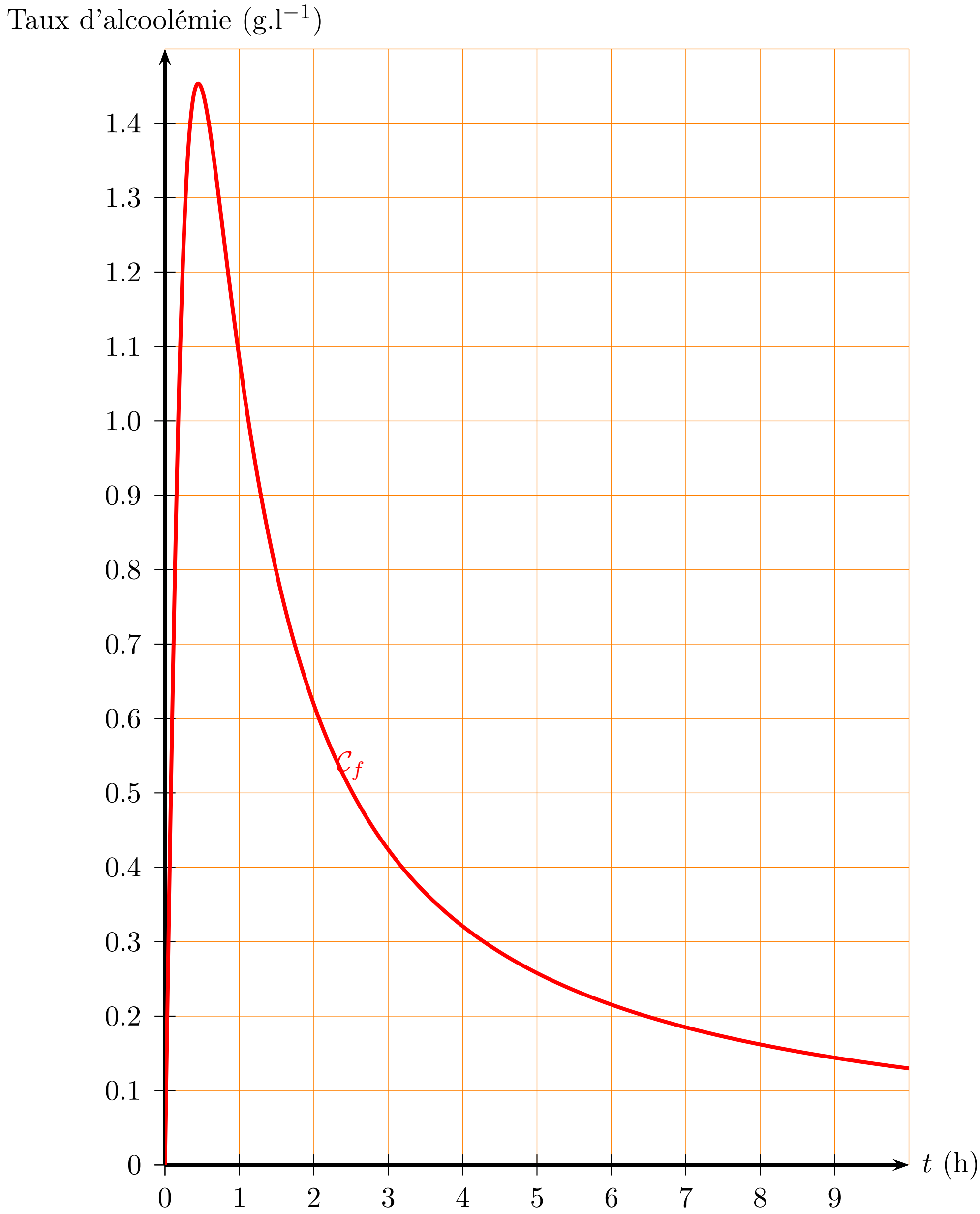




2. Les valeurs de x sont entre 0 et 10, on peut choisir 1 cm $\Leftrightarrow$ 1 ; les valeurs de y dans le tableau sont entre 0 et $1,08\ldots$ mais quand on regarde la courbe, on voit que ça monte jusqu'à $1,5$, voir ci-dessous.



On peut choisir 1 cm $\Leftrightarrow$ $0,1$. Le graphique qu'on obtient est alors à la page suivante.



3. 3h45 après avoir consommé l'alcool, cela donne $t = 3,75$ (45 minutes, c'est 3 quarts d'heure et $\dfrac{3}{4} = 0,75$). La calculatrice donne $A(3,75) \approx 0,34$ donc $\boxed{\text{cette personne peut prendre la voiture}}$ (enfin, concernant le taux d'alcoolémie uniquement ; bien sûr il faut aussi qu'elle ait un permis, ainsi que d'autres contraintes...).