	13/12/2021 MATHEMATIQUES : **TEST B** S 6 FR A 5 PERIODES DUREE 1h30 PROFESSEUR : M. Amri

NOM :		Prénom :
/50		*Signature*

SUJET SANS CALCULATRICE

- **Lors de la correction, il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction.**
- **Les réponses doivent figurer au recto de chaque page dans les espaces prévus à cet effet.**
- **Ce sujet comporte 5 exercices.**

Barème :

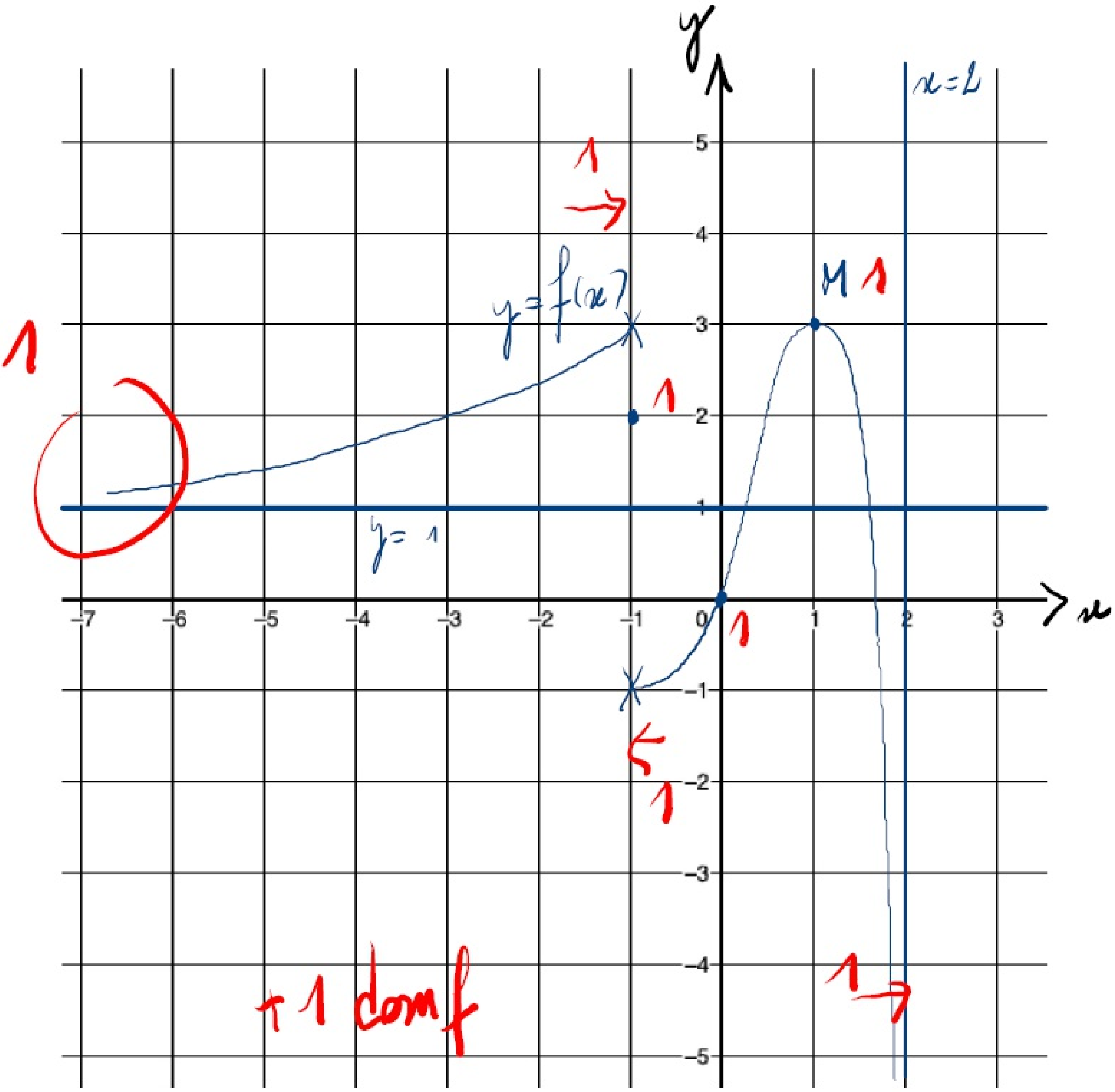
Q 1 :	8	points
Q2 :	11	points
Q3 :	13	points
Q4 :	10	points
Q5 :	8	points

Question 1 : ANALYSE **(8 points)**

Barème

Esquisser le graphique d'une fonction qui vérifie toutes les conditions suivantes :

- $Dom\ f\ =\ ]-\infty; 2[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1$
- $f(-1) = 2$ *et une racine (zéro) en* $x = 0$
- *Un maximum au point de coordonnées* $(1\,;3)$.
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



8 points

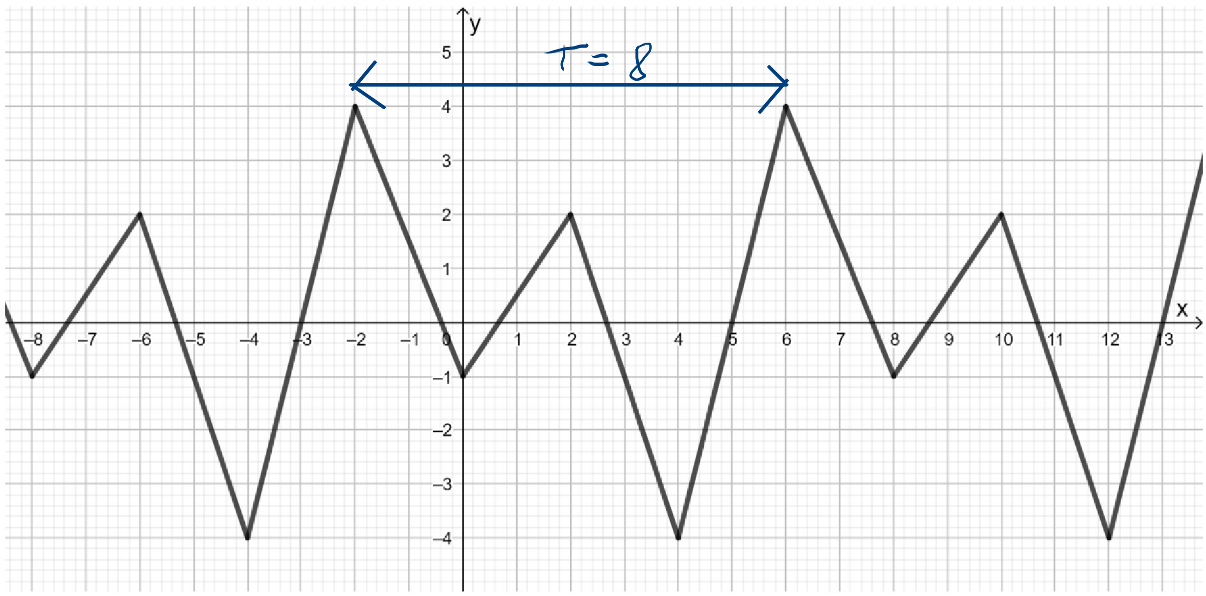
Question 2 ANALYSE **(2 + 3 + 3 + 3 = 11 points)**

Barème

1)

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ? (Justifie ta réponse) Le graphique ci-dessous représente-il une fonction périodique ?

b) Si oui quelle est sa période ?



2 points

a) oui 1
b) $T = 8$ 1

2) Déterminer sous forme d'intervalle le domaine de définition des fonctions suivantes :

3 points

a) $a(x) = \frac{2x}{x-1}$ dom $a = \mathbb{R} - \{1\}$ 1

b) $b(x) = \frac{2}{x^2+1}$ dom $b = \mathbb{R}$ 1

c) $c(x) = \sqrt{1-x}$ dom c = ? il faut : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ 1

$\Rightarrow$ dom $c =]-\infty; 1]$

Barème **3)** On considère la fonction h définie sur $]-\infty;1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

Construire le graphe de la fonction h ; en déduire les variations sur $]-\infty;1]$:

3 points

$g(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = g(-x)$ sym orth axe Oy

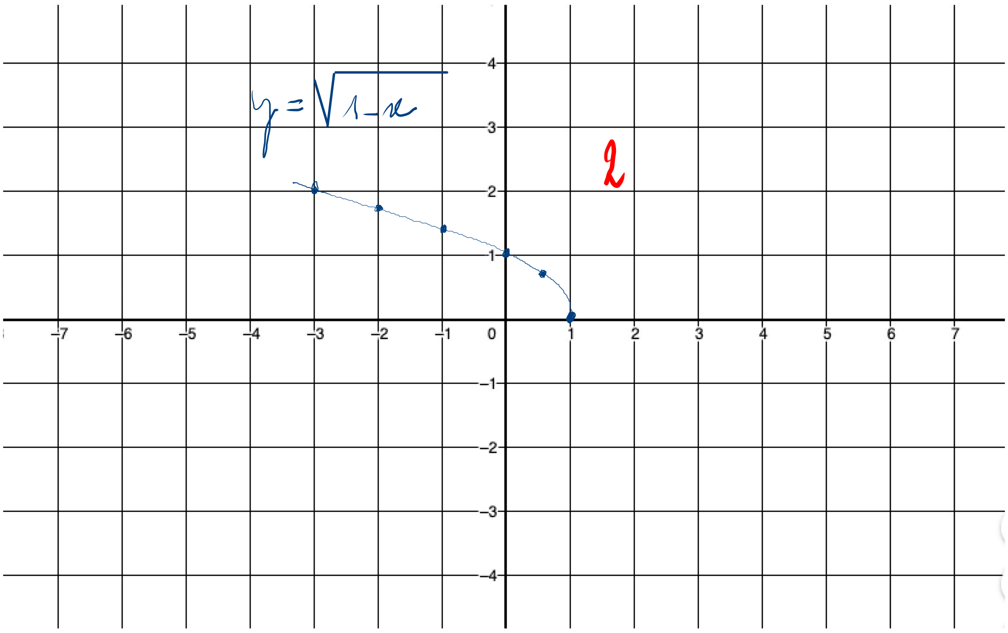
$= \sqrt{-x}$

1U

$h(x) = f(x-1)$

$= \sqrt{-(x-1)}$

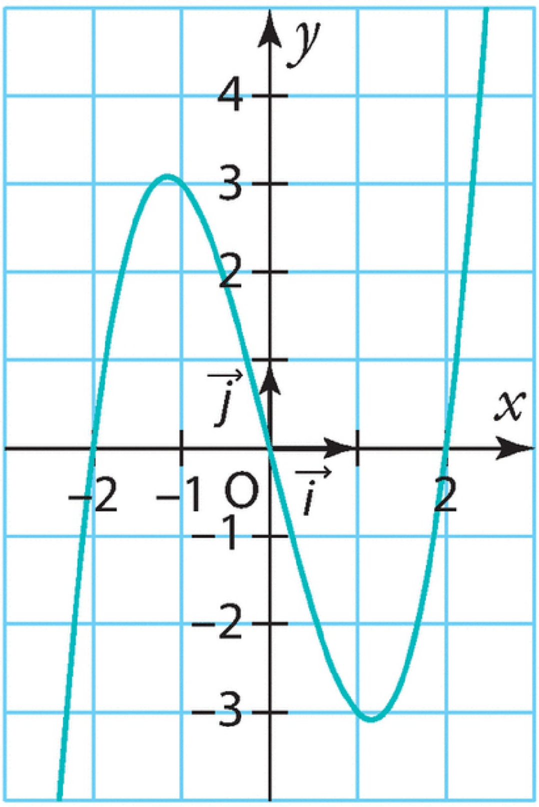
$= \sqrt{1-x}$



$\Longrightarrow$ h strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ 1

4) On considère la fonction f dont la courbe est représentée sur le graphique ci-dessous :

3 points



En déduire le tableau le signe de f sur $]-\infty;\infty]$:

x		-2		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

] 1
] 1
1

Question 3 : GEOMETRIE **(10 + 3 = 13 points)**

Barème

1) Dans le plan muni d'un repère, on considère la droite d1 qui contient le point A (2 ;-1) et le point B (3 ;3).

a) Déterminer des équations paramétriques de la droite d1 .

b) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d1 .

c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d2 passant par P (1 ;2) et parallèle à AB.

d) Déterminer l'équation cartésienne de la droite d3 passant par B et perpendiculaire à AB.

e) Calculer la distance du point P (1 ; 2) à la droite d3.

10 points

a) 2

$$d_1 \begin{cases} \ni A(2;-1) \\ \ni B(3;3) \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}_{d_1} = \vec{AB}\,(1;4) \quad 1$$

$$\Longrightarrow d_1 \equiv \begin{cases} x = 3 + k & (1) \\ y = 3 + 4k & (2) \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad 1$$

b) 2 Élimination du paramètre :

$$(1) \Longleftrightarrow k = x - 3 \xRightarrow{\text{Dans } (2)} y = 3 + 4x - 12 \Longrightarrow d_1 \equiv 4x - y - 9 = 0$$

1 1

c) 2

$$d_2 \begin{cases} \ni P(1;2) \\ /\!/ AB \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}_{d_2} = \vec{AB}\,(\underset{-b}{1};\underset{a}{4})$$

$$\Longrightarrow \text{Faisceau de droites } /\!/ AB \equiv 4x - y + C = 0 \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\text{Or } P(1;2) \in d_2 \Longrightarrow 4.1 - 2 + C = 0 \Longleftrightarrow C = -2$$

1

$$\Longrightarrow d_2 \equiv 4x - y - 2 = 0 \quad 1$$

Barème

d) $d_3 \begin{cases} \ni B(3;3) \\ \perp AB \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}_{d_3} = \vec{n}_{AB} = (\underset{-b}{4}; \underset{a}{-1})$ 2

$\Longrightarrow$ Faisceau de droites $\perp AB \equiv -x - 4y + C = 0 \; (C \in \mathbb{R})$

Or $B \in d_3 \Longrightarrow -3 - 12 + C = 0 \Leftrightarrow C = 15$ 1

$\Longrightarrow d_3 \equiv -x - 4y + 15 = 0 \Longrightarrow d_3 \equiv x + 4y - 15 = 0$ 1

e) 2

$\left. \begin{array}{l} P(1;2) \\ d_3 \equiv x + 4y - 15 = 0 \end{array} \right\}$

$\Longrightarrow d(P; d_3) = \dfrac{|1 + 4.2 - 15|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{17}} = \dfrac{6\sqrt{17}}{17} \; (\simeq 1,46)$ 1 1

2) Le projeté orthogonal du point O (0,0) sur une droite d du plan est le point H(1 ; 1).

Trouver l'équation cartésienne de d.

3 points

H projeté orthogonal de $O(0;0)$ sur d

$\Longrightarrow OH \perp d$

$\Longrightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{OH} = (1;1)$ 1

$\Longrightarrow$ Faisceau de droites $/\!/ d \equiv x + y + C = 0 \; (C \in \mathbb{R})$

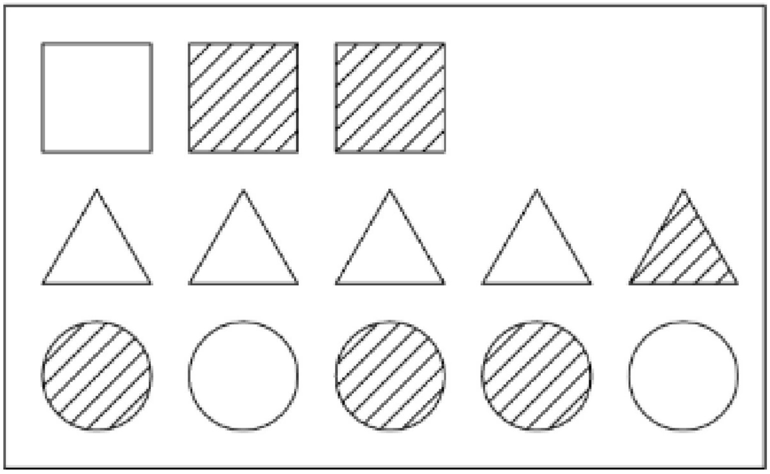
Or $H(1;1) \in d \Longrightarrow 1 + 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$ 1

$\Longrightarrow d \equiv x + y - 2 = 0$ 1

Question 4 : PROBABILITES **(5 + 5 = 10 points)**

Barème

1) Un jeu consiste à secouer et renverser une bouteille afin d'en sortir un de ses éléments. La sortie des éléments est équiprobable. Voici le contenu de cette bouteille :



On note les évènements suivants :

A : « l'élément sorti est un carré »

B : « l'élément sorti est rayé »

a) Déterminer la probabilité que l'élément sorti est un carré rayé ?

b) Déterminer la probabilité d'avoir un élément rayé parmi les éléments carrés ?

c) Déterminer la probabilité d'avoir un élément carré parmi les éléments rayés ?

a) Nombre total de cas : 13 éléments $\Longrightarrow p(\text{carré rayé}) = \frac{2}{13}$ 1
Cas favorables : 2 carrés rayés

5 points

b) Nombre total de cas : 3 carrés $\Longrightarrow p_{\text{carré}}(\text{rayé}) = \frac{2}{3}$ 1
Cas favorables : 2 carrés rayés / 1

c) Nombre total de cas : 6 éléments rayés / 1 $\Longrightarrow p_{\text{rayé}}(\text{carré}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 1
Cas favorables : 2 carrés rayés

Barème

2) Dans une population, il y a 80 % de droitiers et 45 % de myopes.

Parmi les myopes, $\frac{1}{5}$ ne sont pas droitiers.

Quand on tire au sort quelqu'un dans cette population, les événements D : « obtenir une personne droitière » et M : « obtenir une personne myope » sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

5 points

$$p_M(\bar{D}) = \frac{1}{5} = \frac{p(M \cap \bar{D})}{p(M)} = \frac{p(M \cap \bar{D})}{0,45} \implies p(M \cap \bar{D}) = \frac{45}{100} \times \frac{1}{5} = 0,09$$ 1

$$p(M) = 0,45 = p(M \cap D) + p(M \cap \bar{D}) \implies p(M \cap D) = 0,45 - 0,09 = 0,36$$ 1

$$\implies p_D(M) = \frac{p(M \cap D)}{p(D)} = \frac{0,36}{0,8} = 0,45$$ 1

$$p_{\bar{D}}(M) = \frac{p(M \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = \frac{0,09}{0,2} = \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{2} = 0,45$$ 1

$$\implies p_D(M) = p_{\bar{D}}(M) = p(M) = 0,45$$

$\implies$ M et D indépendants 1

Question 5 : COMPLEXES **(4 + 4 = 8 points)**

Barème

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

Les solutions seront exprimées sous forme algébrique $(a + ib$, a et b réels$)$

a) $2iz - 7 - 5i = 3i - z$

a) $2iz - 7 - 5i = 3i - z$

4

$\Leftrightarrow 2iz + z = 3i + 5i + 7$

$\Leftrightarrow z.(1 + 2i) = 7 + 8i$ 1

$\Leftrightarrow z = \dfrac{7 + 8i}{1 + 2i}$ 1

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(7 + 8i).(1 - 2i)}{1 + 4}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{7 - 14i + 8i - 16i^2}{5}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{23 - 6i}{5}$ 1 $\Longrightarrow S = \left\{\dfrac{23 - 6i}{5}\right\}$ 1

4 points

CSolutions(2 ί z − 7 − 5 ί = 3 ί − z)

$\rightarrow \left\{\dfrac{\mathbf{23 - 6\,i}}{\mathbf{5}}\right\}$

b) $z + 2\bar{z} = 8 + i$

Barème

$z + 2\bar{z} = 8 + i \quad (1)$

4

Poser : $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$ 1

$\Longrightarrow$ (1) devient : $a + bi + 2.(a - bi) = 8 + i$

$\Leftrightarrow a + bi + 2a - 2bi = 8 + i$

$\Leftrightarrow 3a - bi = 8 + i$ 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 8 \\ -b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = -1 \end{cases}$ 1 $\Longrightarrow S = \left\{ \frac{8}{3} - i \right\}$ 1

CSolutions($z + 2\,\bar{z} = 8 + i$)

$\rightarrow \left\{ \frac{8 - 3\,i}{3} \right\}$

4 points