	13/12/2021 MATHEMATIQUES : **TEST B** S 6 FR A 5 PERIODES DUREE 1H30 PROFESSEUR : M. Amri

NOM :	Prénom :	
/50		*Signature*

SUJET AVEC CALCULATRICE

- **Lors de la correction, il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction.**
- **Les réponses doivent figurer au recto de chaque page dans les espaces prévus à cet effet.**
- **L'utilisation d'une calculatrice scientifique non graphique et non programmable est autorisé.**
- **S'il n'est pas précisé que le détail des calculs est demandé, vous pouvez faire les calculs à la calculatrice mais vous devez toujours faire figurer votre démarche.**
- **Ce sujet comporte 6 questions.**

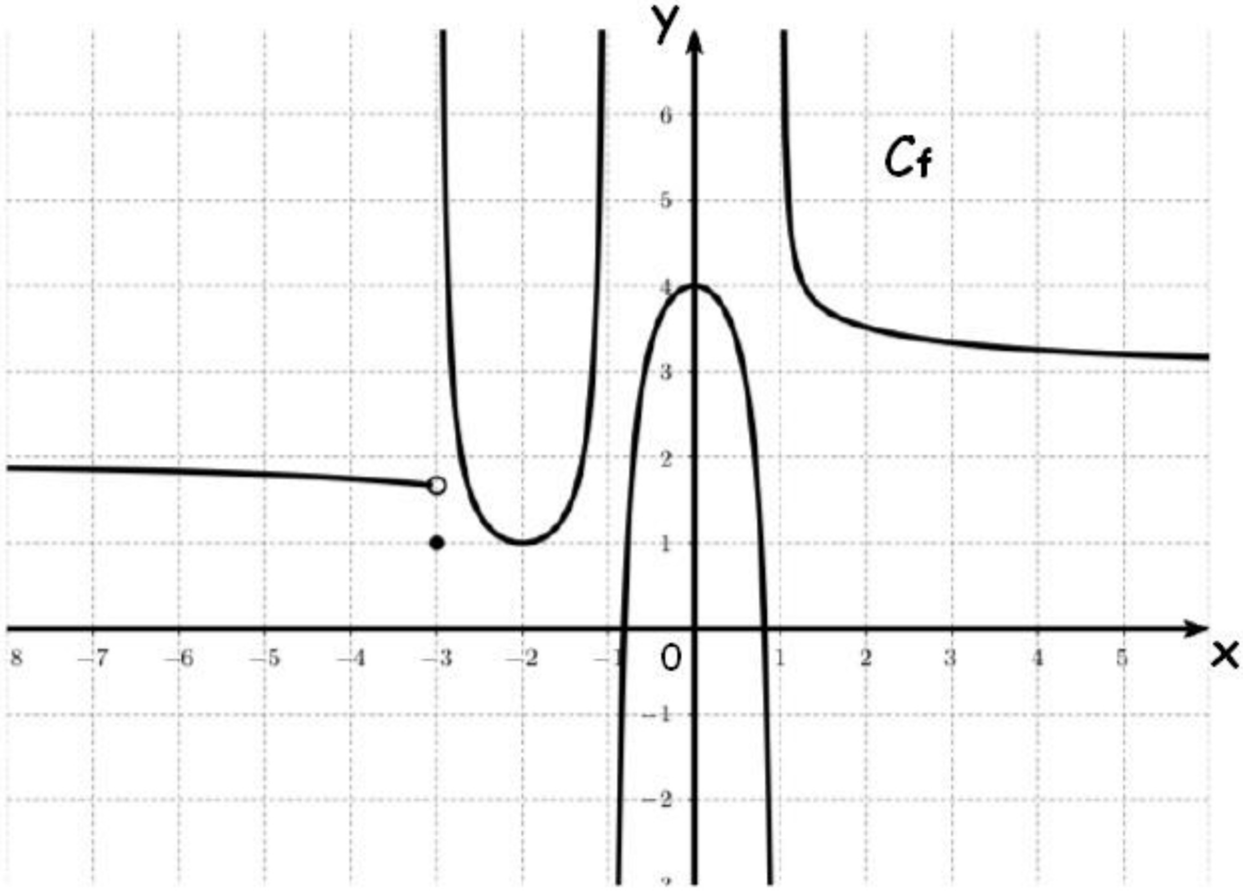
Barème :

Q 1 :	10	points
Q 2 :	6	points
Q 3 :	5	points
Q 4 :	7	points
Q 5 :	12	points
Q 6 :	10	points

Question 1 : ANALYSE **(10 points)**

Barème

Voici le graphique d'une fonction f :



1) Déterminer sous forme d'intervalle le domaine de définition de la fonction f.

2 points

$\text{dom} f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ ou $\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ 2

2) Déterminer les limites suivantes :

8 points

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dots 2$ 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dots 3$ 1

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) \simeq \dots 1,7$ 1

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \dots +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \dots +\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \dots -\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dots -\infty$ 1

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dots +\infty$ 1

Question 2 : ANALYSE **(6 points)**

Barème

1) Calculer les limites suivantes :

1 point

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{-3}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}}+\sqrt{1-x}\right) = \lim_{x\to1^-}\left(\overbrace{\frac{-3}{(x-1)^2}}^{\to -\infty}+\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 0}\right) = -\infty$$

1 point

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to+\infty}}+\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to+\infty}\right) = 0+\infty = +\infty$$

1 1

1 point

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{-x^2}_{\to-\infty}+\underbrace{5x}_{\to-\infty}-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right) = -\infty$$

1

1 point

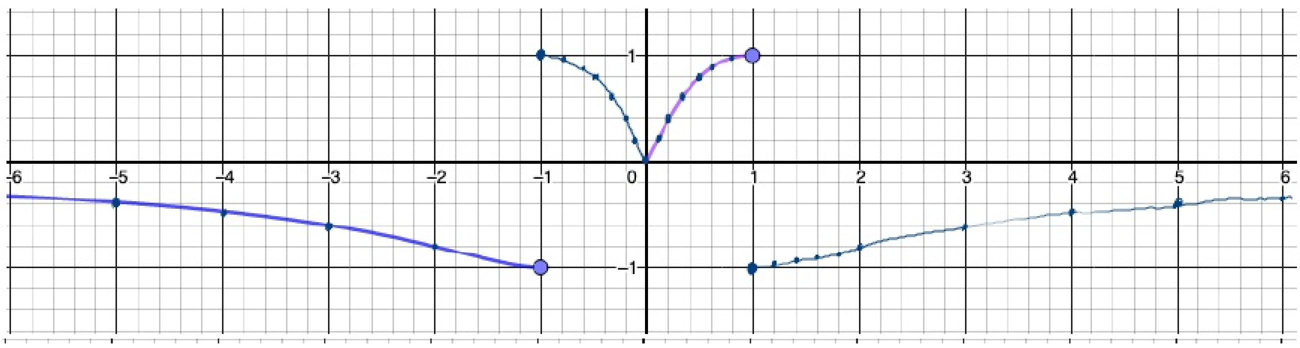
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\overbrace{1+x}^{\to 1}}{\underbrace{2x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

1

2) Une partie de la courbe représentant la fonction f a été tracée ci-dessous.

a) Complète le graphique sachant que la fonction f est définie et paire sur $]-\infty,\infty[$

1 point



1

b) Donner sous forme d'intervalle le domaine image de la fonction f .

1 point

$Im f = [-1;1]$

1

Question 3 : GEOMETRIE **(5 points)**

Barème

1) Dans le plan muni d'un repère, on considère la point P (3 ; 1) et la droite d définie par son équation cartésienne : $d \equiv x + 5y - 2 = 0$

On note H le projeté orthogonal du point P sur la droite d.

Déterminer les coordonnées de H.

$d_2 ? : d_2 \begin{cases} \perp d \\ \ni P(3;1) \end{cases} \Longrightarrow \vec{v}_{d_2} = \vec{n}_d \, (1;5)$ 1

$\Longrightarrow$ Faisceau de droites $\parallel d_2 \equiv 5x - y + C = 0 \; (C \in \mathbb{R})$

Or $P \in d_2 \Longrightarrow 5.3 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -14$ 1

$\Longrightarrow d_2 \equiv 5x - y - 14 = 0$ 1

$H ? : d_2 \cap d = \{H\}$

$\begin{cases} x + 5y - 2 = 0 \\ 5x - y - 14 = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right| \; 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \cancel{5y} - 2 + 25x - \cancel{5y} - 70 = 0 \\ x + 5y - 2 = 0 \end{cases}$ 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} 26x = 72 \\ y = \dfrac{2 - x}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36}{13} \; (\simeq 2,77) \\ y = \dfrac{-10}{65} = \dfrac{-2}{13} \; (\simeq -0,15) \end{cases} \Longrightarrow H\left(\dfrac{36}{13} ; \dfrac{-2}{13}\right)$ 1

5 points

Question 4 : GEOMETRIE **(7 points)**

Barème

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points D(3 ; 5) , E(-1 ; 0) et F(2 ; 4).

Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{EDF}$ au centième de degré près.

4 points

$$\left.\begin{array}{l} D(3;5) \\ E(-1;0) \\ F(2;4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \overrightarrow{DE}(-4;-5) \\ \overrightarrow{DF}(-1;-1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = -4\cdot(-1)+(-5)\cdot(-1) = 4+5 = 9 & 1 \\ \|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{41} & 1 \\ \|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} & 1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{DEF}) = \frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}}{\|\overrightarrow{DE}\|\cdot\|\overrightarrow{DF}\|} = \frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{41}}$$

$$\Rightarrow \widehat{DEF} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{41}}\right) \simeq 6{,}34° \quad 1$$

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A (-2 ; 3) , B(4 ;-1) et un point C tel que :

- L'abscisse du point C est égale à 3 ;
- Le triangle ABC est rectangle en B.

Déterminer les coordonnées de C.

3 points

Soit $d \left| \begin{array}{l} \perp AB \\ \ni B(4;-1) \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{AB}(6;-4) \Rightarrow \overrightarrow{n_d} = \overrightarrow{AB}(6;-4)$

$\Rightarrow$ Faisceau de droites // $d \equiv 6x-4y+c=0$

or $B(4;-1) \in d \Rightarrow 24+4+c \Leftrightarrow c=-28$

$\Rightarrow d \equiv 6x-4y-28=0$

$\Rightarrow d \equiv 3x-2y-14=0$ 1

C ? :

$$\left\{\begin{array}{l} C \in d \\ C \text{ d'abscisse } 3 \Leftrightarrow C \in d_2 \equiv x=3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow C = d \cap d_2$ 1

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y-14=0 \\ x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9-2y-14=0 \\ x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y=-5 \\ x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{-5}{2} \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow C\left(3;\frac{-5}{2}\right)$$

1

Question 5 : PROBABILITES (5 + 7 = 12 points)

Barème

1) Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à 1/10 ;

S'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à 9/10.

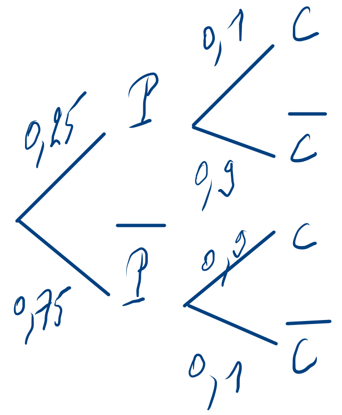
Sachant que j'ai sorti mon chien, quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

5 points

P = "il pleut"

C = "je sors mon chien"

$\Longrightarrow$



$p(C) = \overbrace{0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}75 \cdot 0{,}9}^{1} = \overbrace{0{,}7}^{1}$

$p(P \cap C) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}025$ 1

$p(P \mid C) = p_C(P) = \dfrac{p(P \cap C)}{p(C)}$

$\Longrightarrow p(P \mid C) = \overbrace{\dfrac{0{,}025}{0{,}7}}^{1} \cong 3{,}57\%$ 1

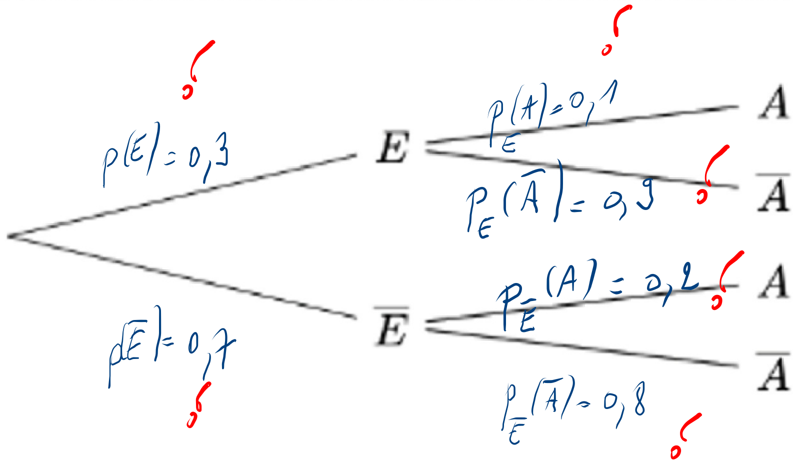
Barème

2) L'arbre suivant représente les données d'un exercice de probabilité. La probabilité d'un évènement H est noté P(H).

On sait que : $P(E) = 0{,}3$; $P_E(A) = 0{,}1$ et $P(\bar{E} \cap A) = 0{,}14$

a) Compléter l'arbre ci-dessous :

3 points



$p(\bar{E} \cap A) = p(\bar{E}) \cdot P_{\bar{E}}(A) = 0{,}7 \cdot P_{\bar{E}}(A) = 0{,}14 \implies P_{\bar{E}}(A) = \frac{0{,}14}{0{,}7} = 0{,}2$

b) Calculer $P(A)$

2 points

$p(A) = p(A \cap E) + p(A \cap \bar{E}) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}03 + 0{,}14 = 17\,\%$

c) Calculer $P_A(E)$

2 points

$P_A(E) = \frac{p(A \cap E)}{p(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}17} = \frac{3}{17} \simeq 17{,}65\,\%$

Question 6 : LES COMPLEXES **(6 + 4 = 10 points)**

Barème

1) Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) : $z^2 + 6z + 25 = 0$

a) Déterminer les solutions de l'équation (E)

2 points

$z^2 + 6z + 25 = 0$

$\Delta = 36 - 4.25 = -64 = 64 . i^2$

$\Longrightarrow z_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i$ 1

$\Longrightarrow S = \{-3-4i ; -3+4i\}$ 1

CSolutions$(z^2 + 6z + 25 = 0)$

$\rightarrow \{-3 + 4\,i, -3 - 4\,i\}$

b) Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$(1 + 2i)^2 \quad et \quad (1 - 2i)^2$$

2 points

$(1+2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$ 1

$(1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = -3 - 4i$ 1

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

2 points

$z^4 + 6z^2 + 25 = 0 \quad (1)$

Posons $t = z^2$

$\Longrightarrow$ (1) devient : $t^2 + 6t + 25 = 0$

$\Longrightarrow t_{1,2} = -3 \pm 4i = (1 \pm 2i)^2$

$\Longrightarrow \begin{cases} z^2 = (1+2i)^2 \\ z^2 = (1-2i)^2 \end{cases}$ 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm(1+2i) \\ z = \pm(1-2i) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+2i \\ z = -1-2i \\ z = 1-2i \\ z = -1+2i \end{cases}$ 1

$\Longrightarrow S = \{-1-2i ; 1+2i ; 1-2i ; -1+2i\}$

CSolutions$(z^4 + 6z^2 + 25 = 0)$

$\rightarrow \{1 + 2\,i, 1 - 2\,i, -1 + 2\,i, -1 - 2\,i\}$

Barème

2) Pour tout nombre complexe z, on pose A $= z^2 - 8 + \bar{z}^2$

On note x et y les parties réelles et imaginaires du nombre z.

a) Exprimer A en fonction de x et y et interpréter la nature de A.

2 points

$A = (x+yi)^2 - 8 + (x-yi)^2$

$= x^2 + \cancel{2xyi} + y^2 i^2 - 8 + x^2 - \cancel{2xyi} + y^2 i^2$ 1

$= 2x^2 - 2y^2 - 8 \Longrightarrow A \in \mathbb{R}$ 1

b) Calculer A pour $z = -3 + i\sqrt{5}$

2 points

$z = -3 + i\sqrt{5} \Longrightarrow x = -3$ et $y = \sqrt{5}$

$\Longrightarrow A = 2x^2 - 2y^2 - 8$

$\Longrightarrow A = 2.(-3)^2 - 2.5 - 8$ 1

$= 18 - 10 - 8$

$\Longrightarrow A = 0$ 1

z1 := −3 + i · √5

→ **z1 := i √5 − 3**

(z1)² − 8 + (conjugate(z1))²

→ **0**