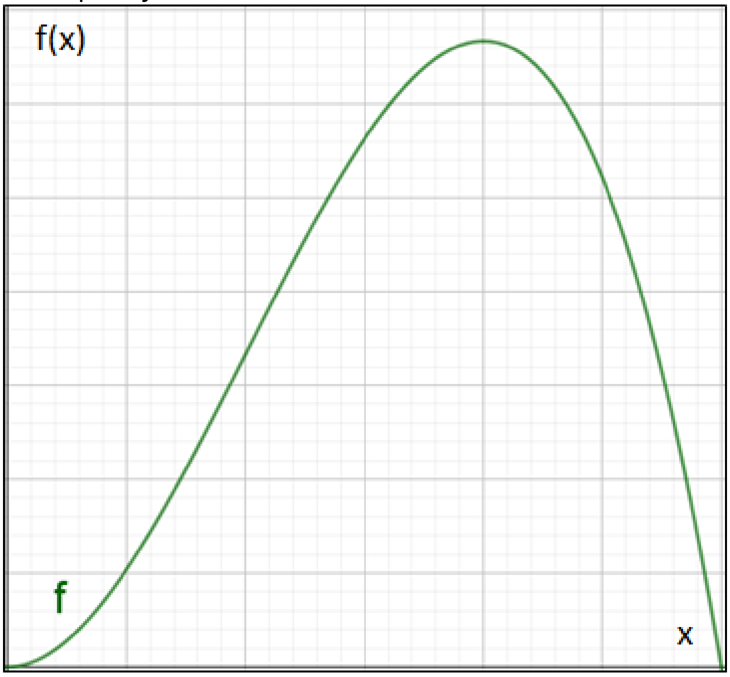
Teil A Antworten

	Teil A	Punkte			
		KV	M	P	I
1	Ein kleiner Hügel auf einem Spielplatz kann durch eine Funktion f modelliert werden mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$, für $x > 0$ wobei x die Entfernung in Metern (m) ist und $f(x)$ die Höhe in Metern (m) ist. Das Bild zeigt den Graphen f dieser Funktion.  **Bestimmen Sie** die Höhe dieses Hügels.				
	$f'(x) = -x^2 + 2x$	1	1		
	$f'(x) = 0$	1			
	$-x^2 + 2x = 0$				
	$x \cdot (-x + 2) = 0$				
	$x = 0 \text{ oder } -x + 2 = 0$				
	$x = 0 \text{ oder } x = 2$		1		
	$f(2) = -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33$				
	Die Höhe beträgt ca. 1,33 m.		1		
2	Nach einigen Beschwerden über das Mittagessen in der Kantine behauptet der Manager, dass maximal nur 20% aller 2.500 Schüler mit dem Mittagessen unzufrieden sind. Der Schülerausschuss denkt, dass es mehr als 20 % der Schüler sind. Also fragen sie eine Gruppe von 40 zufällig ausgewählten Schülern nach ihrer Meinung. a) **Erläutern** Sie, ob ein linksseitiger oder ein rechtsseitiger Test verwendet werden sollte, um diese Hypothese zu überprüfen. Begründen Sie Ihre Antwort. b) **Geben** Sie die Nullhypothese H_0 **an**, die für einen NHST-Test verwendet werden könnte, und nennen Sie die Alternativhypothese H_1.				

<table>
<tr><td></td><td colspan="5">c) Bestimmen Sie den kritischen Wert k mit Hilfe der folgenden Tabelle, wenn das Signifikanzniveau auf 5 % festgelegt ist, und interpretieren Sie diesen Wert.
<table>
<tr><td>k</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$P(X \geq k)$</td><td>0.563</td><td>0.407</td><td>0.268</td><td>0.161</td><td>0.088</td><td>0.043</td><td>0.019</td><td>0.008</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>a) Ein rechtsseitiger Test ist angebracht, weil die Schüler zeigen wollen, dass p höher ist.

b) $H_o: p \leq 0.2$ und $H_1: p > 0.2$

c) $k = 13$,
denn $P(X = 12) > 0.05$ und $P(X = 13) < 0.05$
Das heißt, wenn 13 oder mehr Schüler nicht zufrieden sind, ist der Manager nachweislich im Unrecht.</td><td>1

1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="5">Eine kleine Supermarktkette beschäftigt 900 Mitarbeiter. 10 von ihnen arbeiten in der Geschäftsleitung, aber nur einer der Manager ist weiblich. Die anderen 809 Frauen arbeiten in den Geschäften.
Zeigen Sie, dass es vom Geschlecht abhängt, ob Sie eine Stelle im Management dieser Firma bekommen.</td></tr>
<tr><td></td><td>Die gegebenen Informationen können in eine Tabelle eingesetzt werden, um die fehlenden Werte zu rekonstruieren.

M: Management
F: weiblich
<table>
<tr><td></td><td>F</td><td>$\bar{F}$</td><td></td></tr>
<tr><td>M</td><td>1</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$\bar{M}$</td><td>809</td><td>81</td><td>890</td></tr>
<tr><td></td><td>810</td><td>90</td><td>900</td></tr>
</table>
Die Abhängigkeit der beiden Ereignisse kann mit Hilfe der Formel dargestellt werden:
$$P(F \cap M) = \frac{1}{900}$$
$$P(F) \cdot P(M) = \frac{810}{900} \cdot \frac{10}{900} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{90} = \frac{9}{900} = \frac{1}{100}$$
$$P(F \cap M) \neq P(F) \cdot P(M)$$</td><td>1</td><td>1

1</td><td>1

1</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="5">Ein Ehepaar benötigt einen negativen Covid-Test, um Freunde im Ausland zu besuchen. Es ist bekannt, dass 20 % der Tests ein negatives Ergebnis zeigen, obwohl die Person infiziert sein könnte (falsch negatives Ergebnis). Die Wahrscheinlichkeit eines falsch positiven Ergebnisses liegt nahe bei null. Es kann davon ausgegangen werden, dass, wenn einer von ihnen infiziert ist, auch der andere infiziert ist.
Erläutern Sie, warum diese Situation ein Bernoulli-Prozess ist, und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit eines falsch negativen Ergebnisses auf 4 % sinkt, wenn beide getestet werden.</td></tr>
<tr><td></td><td>Beide Tests sind unabhängig. Es gibt nur zwei Ergebnisse; der Test kann richtig oder falsch sein und die Wahrscheinlichkeit eines falschen Ergebnisses ist in jedem Test gleich.
$$P(X = 2) = B(2; 0{,}2; 2) = 0{,}2^2 = 0{,}04 = 4\%$$</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="5">In dem unten abgebildeten Diagramm ist die Anzahl der neuen COVID-19-Fälle in Deutschland über einen Zeitraum von 3 Wochen im Oktober 2020 dargestellt. Um die Zahlen in der Zukunft</td></tr>
</table>

	vorherzusagen, können zwei grundlegende Arten von mathematischen Modellen kombiniert werden.  **Nennen** Sie die Namen dieser Modelltypen und **begründen** Sie Ihre Antwort. **Sagen** Sie ein Datum in der Zukunft **voraus**, an dem ein weiteres Maximum erreicht wird, wenn die Zahlen den Modellen folgen.				
	Da die Zahlen mit einer Zeitabschnitt von 7 Tagen oszillieren, kann auf kleinräumiger Ebene ein periodisches Modell verwendet werden. Auf großräumiger Ebene steigen die Zahlen jedoch insgesamt an. Um diese Entwicklung zu modellieren, könnte ein Exponentialmodell verwendet werden, da weder Maxima noch Minima auf eine gerade Linie passen. Das nächste Maximum wird am 24. Oktober.	1	1	2	1
6	In einem Labor wird die Anzahl von Bakterien in einer Petrischale untersucht. Es stellt sich heraus, dass unter bestimmten Bedingungen das Wachstum durch die Funktion modelliert werden kann mit $$N(t) = 10\,000 \cdot e^{\ln(1{,}03) \cdot t},$$ wobei $N(t)$ die Anzahl der Bakterien nach t Tagen. a) **Geben** Sie die Anzahl der Bakterien zu Beginn und die Wachstumsrate in Prozent **an**. b) **Berechnen** Sie die Anzahl der Bakterien nach dem ersten Tag. c) **Erklären** Sie, warum dieses Modell nicht auf einer sehr großen Zeitskala verwendet werden kann.				
	a) Das Experiment beginnt mit 10 000 Bakterien. Pro Tag erhöht sich die Anzahl um 3 %. b) $N(1) = 10\,000 \cdot 1{,}03 = 10\,000 + 300 = 10\,300$ c) Irgendwann ist die Petrischale voll mit Bakterien und es gibt keinen Platz oder keine Nahrung mehr, so dass das Wachstum aufhört.	2	2		1
7	**Geben** Sie **an,** ob die Aussage wahr oder falsch ist, und **begründen** Sie Ihre Antwort. Beachten Sie, dass die Punkte nur vergeben werden, wenn Antwort und Begründung richtig sind. a) Wenn die Temperatur $T(x)$ ständig ansteigt, dann $T'(x) > 0$. b) Alle periodischen Modelle können durch eine Sinusfunktion modelliert werden. c) Es gibt 9 verschiedene Möglichkeiten für 3 Schüler, nebeneinander zu stehen. d) Wenn ein Würfel einmal geworfen wird, ist der Erwartungswert 3,5.				

	e) Wenn 10 Personen aus einer sehr großen Gruppe ausgewählt werden, kann die Anzahl der Frauen durch eine Binomialverteilung modelliert werden, obwohl eine Person nicht mehr als einmal ausgewählt werden kann.				
	a) Richtig, denn wenn die Temperatur steigt, ist die Steigungsrate positiv, und die Steigungsrate ist durch die Ableitung gegeben.		1		
	b) Falsch, denn das rote Licht einer Ampel ist ein periodisches Modell. Aber die Ampel ist entweder an oder aus, ohne Zwischenstufen, daher kann sie nicht durch eine Sinusfunktion modelliert werden.	1			
	c) Falsch, denn dieses Beispiel ist ohne Wiederholung. Es gibt also in der Tat nur 6 Möglichkeiten.			1	
	d) Richtig, denn $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6): 6 = 3.5$		1		
	e) Richtig, denn die Änderung der Wahrscheinlichkeit ist bei einer großen Gruppe eher gering. Neben einer konstanten Wahrscheinlichkeit kann es nur zwei Optionen zur Auswahl geben (männlich und weiblich) und es muss eine zufällige Wahl sein.		1		
8	Die Tageslänge $L(t)$ in Stunden an einem bestimmten Ort wurde über ein Jahr aufgezeichnet. Sie kann durch die Funktion L modelliert werden mit $$L(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365}x\right) + 12,$$ wobei t die Zeit in Tagen ist. **Interpretieren** Sie das Ergebnis von $\int_0^{365} L(t)dt$ und **erklären** Sie, warum das Ergebnis gleich $12 \cdot 365 = 4380$ ist.				
	Die Gesamtzahl der Tageslichtstunden in einem Jahr kann durch das Integral der Funktion zwischen 0 und 365 berechnet werden: $$\int_0^{365} L(t)dt\,.$$				1
	Die Sinusfunktion ist symmetrisch, also hat die Fläche über der x-Achse den gleichen Wert wie die Fläche unter der x-Achse auf dem Intervall einer Periode. Das Integral wäre also gleich Null. Da L(t) um 12 Einheiten nach oben verschoben ist und man den Flächeninhalt unter dem Graphen für 365 Tage berechnet, ist das Ergebnis $12 \cdot 365 = 4.380$. Man könnte auch argumentieren, dass dem Einfluss der langen Tage im Sommer immer lange Dunkelheitsperioden im Winter gegenüberstehen; somit kann die Gesamtmenge durch 12·365=4.380 Stunden ausgedrückt werden.		1	3	
9	a) **Interpretieren** Sie, was der Erwartungswert einer Zufallsvariablen bedeutet. b) X ist eine Zufallsvariable, die einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgt. **Geben** Sie eine Wahrscheinlichkeit **an**, welche die beiden charakteristischen Werte μ und σ berücksichtigt. c) X ist eine Zufallsvariable, die einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgt.				

	a) Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist der Durchschnitt der Werte dieser Zufallsvariablen, gewichtet nach ihren Wahrscheinlichkeiten. b) $P(\mu-\sigma \leq Y \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}68$ oder $P(\mu-2\sigma \leq Y \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$ oder $P(\mu-3\sigma \leq Y \leq \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$ c) Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$ entspricht $P(-\infty < Z + \infty)$, der Wahrscheinlichkeit für Y, alle möglichen reellen Werte anzunehmen. Da Y d eine auf $\mathbb{R}$ definierte Zufallsvariable bezeichnet, ist dies die Gesamtwahr-scheinlichkeit aller Ereignisse. Daraus folgt der Wert 1.	2 1		1	1
10	Ein neues Gerät erkennt Doping im Blut. Es seien die folgenden zwei Ereignisse gegeben • P: Der Test ist positiv. • D: Der Sportler war gedopt. Nach einigen Testläufen wurde herausgefunden, dass von 100 Blutproben mit Doping das Gerät dieses in 90 Fällen erkennt. Es gibt aber auch in 5% der Fälle Fehlalarm, wenn die Probe sauber war. Es kann davon ausgegangen werden, dass jeder 10. Sportler bei einer bestimmten Veranstaltung gedopt ist. Wir wollen herausfinden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Sportler tatsächlich gedopt war, wenn der Test positiv ist. a) **Stellen** Sie alle notwendigen Informationen in der korrekten mathematischen Notation **dar**. b) **Verwenden** Sie eine geeignete Methode, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein Sportler gedopt war, wenn der Test positiv war.				
	a) $P(P\|D) = 0.9$ $P(P\|\overline{D}) = 0.05$ $P(D) = 0.1$ b) Man wendet zum Beispiel die Formel von Bayes an: $P(D\|P) = \frac{P(P\|D)\cdot P(D)}{P(P)} = \frac{P(P\|D)\cdot P(D)}{P(P\|D)\cdot P(D) + P(P\|\overline{D})\cdot P(\overline{D})}$ $= \frac{0.9\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.1 + 0.05\cdot 0.9} = \frac{0.1}{0.15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ Es könnte auch ein Baumdiagramm verwendet werden.	1	1 2	1	
	Gesamt = 50	**14**	**21**	**9**	**6**