S7
MATHEMATIQUES 3 PÉRIODES
PARTIE B (Français)
Avec calculatrice

Date : Lundi 30 Janvier 2023
Durée : 2 heures (120 Minutes)
Professeure : Manuela Dikongué
Points de la partie B : 50 points

MATÉRIEL AUTORISÉ :

Calculatrice NumWorks et livret de formules fourni par l'école.

REMARQUES PARTICULIÈRES :

- Il est indispensable que les réponses soient accompagnées par des explications.
- Les réponses doivent mettre en évidence le raisonnement qui amène aux résultats ou solutions.
- Si des graphiques sont utilisés pour trouver une solution, ils doivent être esquissés dans le cadre de la réponse.
- Sauf indication contraire, des points complets ne seront pas attribués si une réponse correcte n'est pas accompagnée de preuves ou d'explications sur la façon dont les résultats ou les solutions ont été obtenus.
- Lorsque la réponse fournie n'est pas la bonne, des points peuvent tout de même être attribués s'il est démontré qu'une méthode appropriée et/ou une approche correcte a été utilisée.

Partie B	**Points**
Question B1 :	**25**
<u>Les parties 1 et 2 sont indépendantes</u> **<u>Partie 1</u>** Le transport routier de passagers à Londres était de 339 601 kilomètres parcourus en 2019, soit une croissance annuelle de 4,6 % par rapport à 226 913 en 2010. Le nombre de kilomètres parcourus est modélisé par la fonction f : $\boldsymbol{f(x) = kA^x}$ Où $f(x)$ est le nombre de kilomètres parcourus et x le nombre d'années à partir de l'année 2010. Ainsi, $f(0) = 226\,913$ est le nombre de millions de kilomètres parcourus en 2010, $f(1)$ est le nombre de millions de kilomètres parcourus en 2011, etc.	
1) Montrer que $A = 1{,}046$ et $k = 226\,913$ en justifiant.	3
2) Écrire la fonction f sous la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, en donnant la valeur approchée du paramètre a à trois chiffres après la virgule. **Détailler** votre calcul.	3
3) Déterminer, pour l'année 2019, la différence entre la prévision de la formule de $f(x)$ et la valeur réelle de 339 601 kilomètres.	3
4) Calculer en quelle année le nombre de kilomètres sera égal à 312 000**.**	2
5) Expliquer pourquoi ce modèle ne peut pas être utilisé sur un nombre très élevé d'années.	2
6) On suppose que le nombre de kilomètres parcourus s'écrit : $N = 226\,913\ \mathrm{e}^{0{,}045x}$ où N est le nombre de kilomètres et x le nombre d'années à partir de 2010. **Démontrer** que le nombre d'années x à partir de 2010 exprimé en fonction du nombre de kilomètres, est donné par la formule suivante : $x = \dfrac{ln\left(\dfrac{N}{226\,913}\right)}{0{,}045}$	2

Partie 2

Dans la très grande métropole d'Istanbul le nombre de kilomètres en mai 2021 était de 2 500 000. Mais avec la meilleure gestion de la Covid-19, une augmentation du nombre de kilomètres est prévue. Ainsi, deux ingénieurs (ingénieur n°1 et ingénieur n°2) prédisent le nombre de kilomètres parcourus chaque mois à partir du mois de mai 2021.

Les ingénieurs prévoient ainsi les données pour les mois suivants :

Mois	**Prévisions de l'ingénieur n°1** Nombre de km parcourus	**Prévisions de l'ingénieur n°2** Nombre de km parcourus
Mai 2021	2 500 000	2 500 000
Juin 2021	2 550 000	2 537 500
Juillet 2021	2 600 000	2 575 563
Août 2021	2 650 000	2 614 196
Septembre 2021	2 700 000	2 653 409
Octobre 2021	2 750 000	2 693 210

1) Chercher quel ingénieur a fait un modèle linéaire et quel ingénieur a fait un modèle exponentiel. **Justifier** votre choix par des calculs. 4

2) On suppose que l'ingénieur n°2 a construit un modèle exponentiel :

i) Déterminer l'expression de la fonction exponentielle correspondante sous la forme : $\boldsymbol{h(t) = k \times A^t}$ 2

où t est le nombre de mois écoulés après mai 2021. 2

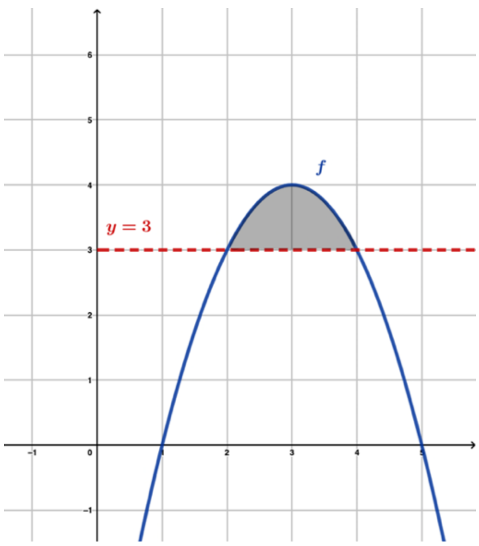
ii) Déterminer le taux de croissance en pourcentage de ce modèle exponentiel.

3) Le modèle linéaire est donné par la formule : $g(t) = 2\,500\,000 + 50\,000 \times t$

et le modèle exponentiel par la formule : $h(t) = 2\,500\,000 \times 1{,}015^t$. 2

Avec t le nombre de mois après mai 2021, soit $t = 0$ au mois de mai 2021.

Calculer le mois au cours duquel on obtient le même nombre de kilomètres pour les deux modèles.

Partie B	**Points**
Question B2 :	**25**
La municipalité d'une ville de montagne prévoit de construire un tunnel dont la section transversale est donnée par la fonction f définie par : $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 6x - 5}$ Avec x en abscisse donnant la largeur en mètres du tunnel et $f(x)$ en ordonnée donnant la hauteur en mètres du tunnel.	
1) À l'aide de votre calculatrice, **déterminer** les abscisses des points d'intersection de la fonction f avec l'axe des abscisses (les zéros de f).	2
2) En **déduire,** par le calcul, la largeur du tunnel en mètres.	2
3) Trouver la hauteur maximale du tunnel en mètres à l'aide de votre calculatrice.	2
4) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ est une primitive de la fonction $f(x)$.	3
5) Calculer l'aire du domaine, en mètres carrés, délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$. Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule.	3
6) Calculer la longueur de l'arc de la courbe de f en mètres, entre $x = 1$ et $x = 5$, arrondie à deux chiffres après la virgule, à l'aide de la formule suivante : $\boldsymbol{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx}$	3
7) Les ingénieurs placent un support en bois d'une hauteur de 3 mètres jusqu'au sommet de la galerie, modélisé dans le graphique ci-dessous, par la zone grisée.  **Calculer** l'aire du support en bois (zone grisée), en mètres carrés, arrondie à deux chiffres après la virgule, à l'aide de la formule suivante : $\boldsymbol{A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert\ dx}$	3

8) On considère la courbe de la fonction f qui tourne autour de l'axe des abscisses.

Calculer le volume du solide de révolution ainsi engendré par la courbe de f, entre $x = 1$ et $x = 5$, à l'aide de la formule suivante : 4

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \ dx}$$

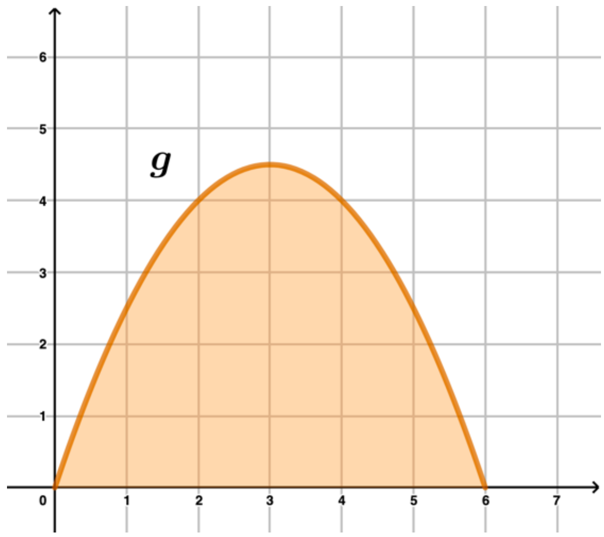
Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule.

9) La cheffe de projet, décide d'agrandir le tunnel en creusant dans la roche.

La section transversale du nouveau tunnel est modélisée par la fonction g définie par : 3

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

avec x et $g(x)$ en mètres, comme dans le graphique ci-dessous.



Calculer l'aire du domaine coloré, en mètres carrés, délimitée par la courbe de g, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 6$. Arrondir le résultat à deux chiffres après la virgule.