Traduction des exercices de http://www.barsamian.am/mathsexams/exam?id=236

Exercice 1 Calc. : ✓

Le train à grande vitesse (TGV) à destination de la Gare Centrale de Luxembourg–Ville commence à ralentir lorsqu'il passe devant la gare de la ville de Bettembourg. La vitesse du train, v, en m/s, est donnée par :

$$v(t) = 84 - 0,3t$$

… où t est le temps en secondes après le passage du train à la gare de Bettembourg.
Pour les questions suivantes, vous pouvez utiliser les formules :

- La distance d (en mètres) parcourue par un objet se déplaçant à une vitesse $v(t)$ entre le temps a et le temps b est donnée par : $d = \int_a^b |v(t)|\,\mathrm{dt}$.
- L'accélération a (en m/s^2) d'un objet se déplaçant à une vitesse $v(t)$ est donnée par : $a = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{dt}}$. L'accélération peut être positive ou négative.
- L'énergie thermique E (en J, Joules) générée entre le temps a et le temps b par le TGV se déplaçant à une vitesse $v(t)$ est donnée par : $E = 220\ 000 \int_a^b v(t)\,\mathrm{dt}$.

2 points a) **Trouver** la distance parcourue par le train 100 secondes après avoir traversé la gare de Bettembourg.

2 points b) **Calculer** l'accélération du train (ici une décélération).

3 points c) **Justifier** par un calcul approprié que le train s'arrête 280 secondes après avoir traversé la gare de Bettembourg, en gardant à l'esprit que le train est considéré comme arrêté lorsque sa vitesse est égale à zéro.

2 points d) Pendant la décélération, il y a une accumulation de chaleur dans les freins du train en raison du frottement. **Calculer** l'énergie thermique générée lors des freinages du train entre le début du processus de décélération à Bettembourg et le moment où le train s'arrête complètement à la Gare Centrale.

Le TGV génère du bruit. Le gouvernement étudie l'utilisation d'arbres et de buissons pour atténuer les effets de ce bruit. À travers un feuillage dense, l'atténuation du bruit des trains A, mesurée en décibels par mètre, dB/m, est donnée par le modèle suivant :

$$A(x) = -0,058 + 0,0177 \cdot \ln(x)$$

… où x est la distance de propagation du bruit, mesurée en mètres depuis le train.

3 points e) **Calculer** l'atténuation du bruit juste après les buissons, à 30 mètres du train.

3 points f) **Trouver** la distance minimale du train qui fournit une atténuation de bruit d'au moins 0,04 dB/m.

2 points g) **Discuter** la limite de la valeur d'atténuation lorsque la distance de propagation s'approche de l'infini.

Les gens arrivent à la gare à l'heure avec une probabilité de 89%. Un jour d'hiver, 210 personnes souhaitent prendre le train. Soit X le nombre de personnes qui arrivent à leur train à l'heure. Nous supposons que X suit une loi binomiale.

2 points h) **Déterminer** la probabilité qu'aucune des personnes n'atteigne son train avec du retard.

2 points i) **Trouver** la probabilité qu'au moins 200 personnes atteignent leur train à l'heure.

2 points j) **Trouver** la probabilité que moins de 90% de ce groupe atteignent leur train à l'heure.

2 points k) **Calculer** l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 2 Calc. : ✓

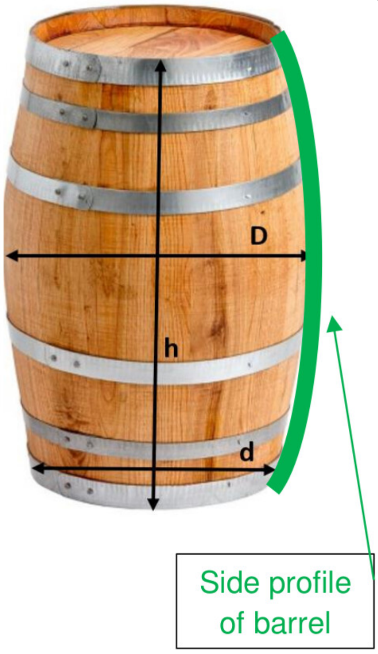
Une cave luxembourgeoise produit des vins partiellement fermentés en fûts de chêne.
En moyenne, le fût utilisé a les dimensions indiquées sur la figure ci-contre :

- Hauteur : h=10 dm
- Diamètre minimum : d=5 dm
- Diamètre maximum : D=6 dm

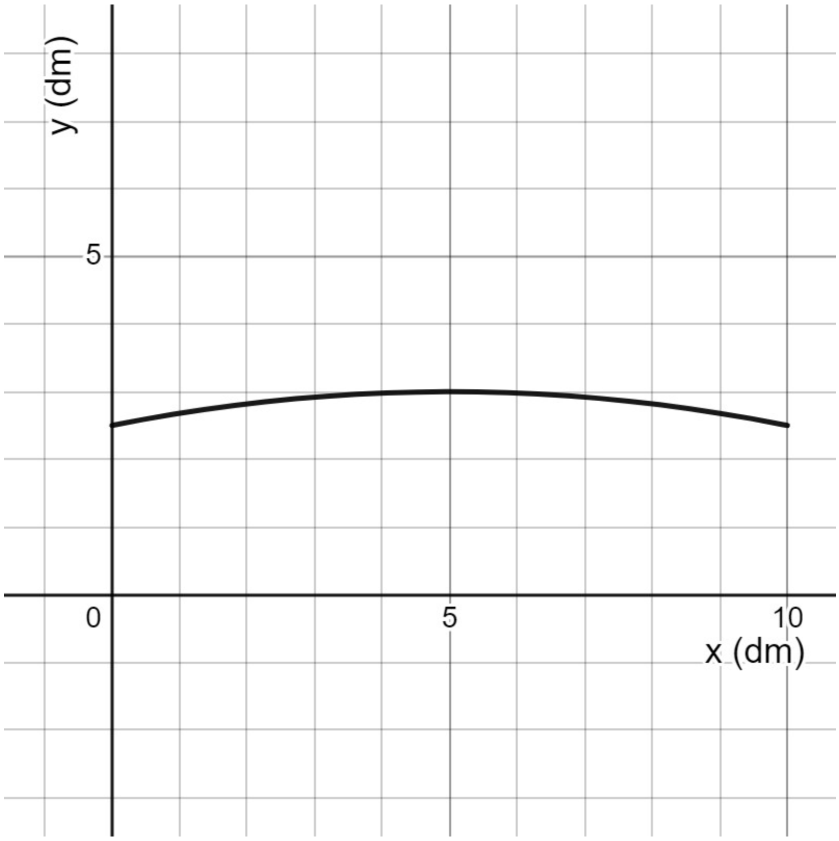
Le profil latéral du fût peut être modélisé avec une fonction

$$f(x) = -0,02x^2 + 0,2x + 2,5$$

... où le rayon du fût $f(x)$ est représenté en fonction de la hauteur x (avec $0 \leq x \leq 10$ et les mesures sont exprimées en décimètres).



Le profil latéral est également représenté dans la figure suivante :



2 points — a) **Calculer** $f'(5)$ et **vérifier** que le fût a un diamètre maximum de 6 dm.

2 points — b) Sachant que la formule pour la longueur d'une courbe est

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

… **calculer** la longueur du profil latéral en dm (exprimer le résultat avec une précision de trois décimales)

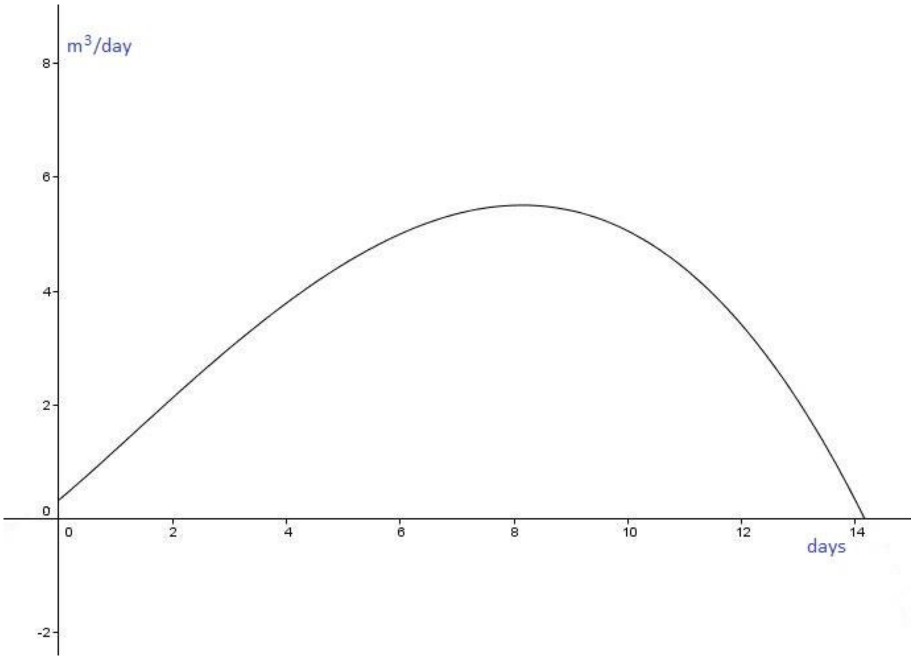
2 points — c) Selon le fabricant de fûts, la capacité moyenne d'un fût est comprise entre 252 et 253 dm^3. **Vérifiez** que la déclaration de l'entreprise est correcte en utilisant la formule du volume d'un solide en rotation :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{dx}$$

d) Après fermentation, le vin est entonné avec un débit en mètres cubes par jour donné par :

$$g(t) = -0,005 \cdot t^3 + t + \frac{2}{3 \cdot t + 6}$$

où t est le temps après le début du transfert, mesuré en jours.
Le graphique de la fonction g est représenté ici :



2 points — i. **Calculer** le volume de vin transféré entre le 2$^{\text{ème}}$ jour et le 14$^{\text{ème}}$ jour (inclus).

2 points — ii. **Déterminer** quand le taux de transfert du vin est maximum.

Une partie du vin produit est utilisée pour élaborer un vin de liqueur de garde. Au fil des années, le vin s'évapore. Le tableau suivant montre la quantité de vin laissée $w(t)$ dans un tonneau rempli en 1990, par rapport au temps t (en années), avec t commençant à $t = 1990$.

t (années)	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Vin restant (litres)	252	252	251	251	249	247	244	244	243	240	239

Entrer ces données dans la calculatrice.

1 point e) En interprétant la tendance observée dans les données sur le liquide restant en fonction de l'année, **expliquer** pourquoi les données semblent être corrélées.

2 points f) En supposant qu'un modèle linéaire puisse être appliqué, **déterminer** l'équation de la droite de régression linéaire. Donner les coefficients de l'équation avec une précision de deux décimales.

1 point g) **Déterminer** le coefficient de régression linéaire avec une précision de deux décimales. **Interpréter** le résultat ; la corrélation est-elle fiable ?

2 points h) Pour cette question, nous prendrons : $w(t) = -1,418t + 3\ 076$. **Estimer** la quantité de vin qui restera dans un fût après 20 ans (votre réponse doit être correcte au litre près).

Le vin est finalement vendu en bouteilles. La campagne promotionnelle du produit exige que l'intérieur du bouchon de la bouteille contienne un code qui donne à l'acheteur une chance de gagner un prix avec une probabilité $p = 0,093$. Dans un centre commercial, 100 bouteilles sont exposées simultanément.

1 point i) **Justifier** le fait qu'on puisse utiliser une distribution binomiale de probabilité p pour modéliser cette situation.

2 points j) **Calculer** l'espérance et l'écart-type de la distribution binomiale.

2 points k) **Calculer** la probabilité (avec une précision de 4 décimales) qu'il y ait au moins 2 bouteilles sur 100 avec un bouchon gagnant.

2 points l) **Calculer** la probabilité (avec une précision de 4 décimales) qu'il y ait exactement 5 bouteilles sur 100 avec un bouchon gagnant.

2 points m) **Calculer** la probabilité (avec une précision de 4 décimales) qu'il y ait au maximum 10 bouteilles sur 100 avec un bouchon gagnant.