Réponses de la partie B

	Partie B	Points			
		CC	M	RP	I

1

Tom et Simon jouent à un jeu de société. Chaque fois que Tom parvient à déplacer son pion d'un tour complet sur le plateau, il obtient 5 points. Chaque fois que Simon réussit à déplacer son pion d'un tour complet sur le plateau, il obtient 10% de la quantité précédente. Ils commencent tous les deux avec 10 points.

a) **Calculer** le score total de Tom après avoir fait 20 fois le tour du plateau.

b) **Écrire** en fonction de n, l'expression de $T(n)$ donnant le score de Tom après $\boldsymbol{n}$ déplacements d'un tour sur le plateau.

c) Si l'on suppose que le score de Simon après $\boldsymbol{n}$ tours autour du plateau peut être modélisé par une suite géométrique, **expliquer** l'utilisation de la formule :

$$S(n) = 11 \cdot 1{,}1^{n-1}$$

d) Simon et Tom ont fait le même nombre de fois le tour du plateau. Le score de Simon vient de dépasser celui de Tom.
Trouver combien de fois ils ont fait le tour du plateau.

Tom défie Simon à un jeu de dés. Deux dés à six faces sont lancés et la somme des scores est notée. Pour une somme inférieure à 6 Simon reçoit 10 centimes, pour une somme comprise entre 6 et 9, Simon perd 5 centimes et pour une somme supérieure ou égale à 10, Simon reçoit 30 centimes. Les gains sont déterminés par la distribution de probabilité ci-dessous, où la variable aléatoire N est la somme des scores.

N	$n < 6$	$6 \leq n \leq 9$	$n \geq 10$
Gains n	10 centimes	–5 centimes	30 centimes
$P(N = n)$	a	$\frac{20}{36}$	b

e) **Montrer** que $a = \frac{10}{36}$ et $b = \frac{6}{36}$.

f) **Calculer** l'espérance des gains de Simon dans ce jeu et dites si cela vaut la peine que Simon y joue.

g) Un jeu est dit équitable si l'espérance des gains est égale à 0.
Déterminer combien de centimes doivent être perdus pour une somme comprise entre 6 et 9 afin que ce jeu soit équitable.

a) Calculer le score de Tom après avoir fait 20 fois le tour du plateau. (CC: 2)

$c = 15 + 19 \cdot 5$

$\rightarrow 110$

b) Écrire en fonction de n l'expression de $T(n)$ pour le score de Tom après n déplacements sur le plateau. (CC: 1, M: 1)

$T(n) = 5n + 10$

c) Après 1 tour : (M: 2)

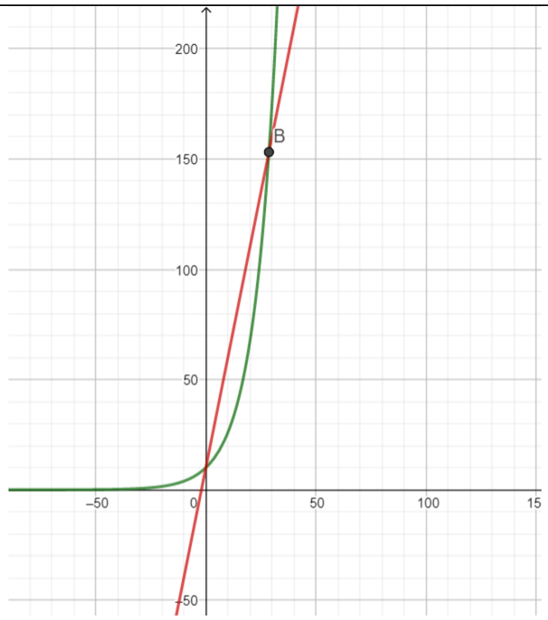
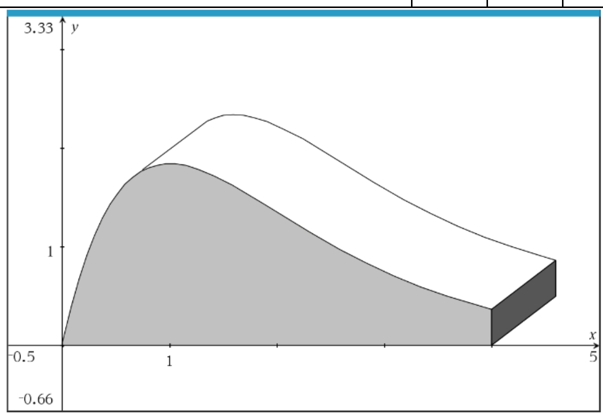
$10 + 10 \cdot 0{,}1 = 10 + 1 = 11 \cdot 1{,}1^{1-1}$

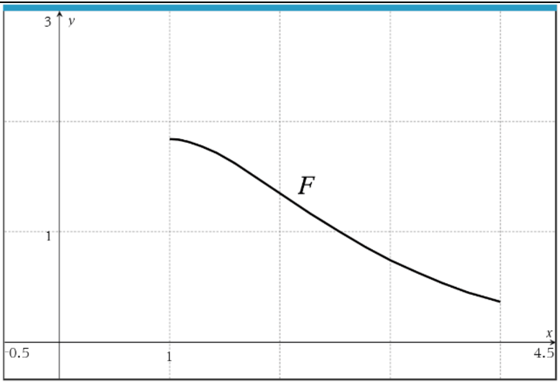
Après 2 tours :

$11 + 11 \cdot 0{,}1 = 11 \cdot (1 + 0{,}1) = 11 \cdot 1{,}1 = 11 \cdot 1{,}1^{2-1}$

Etc.

d) Traçons le graphique de $T(n)$ et $S(n)$ dans le même repère. (M: 2, RP: 1)

	 Quel est le nombre minimal de tours autour du plateau pour que le score de Simon dépasse celui de Tom ? B = Intersect(S, T, (28.63, 153.16)) → (28.63, 153.16) D'où la réponse : 29 tours				
	e) $\boldsymbol{a = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)}$ $\boldsymbol{= 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36}$ $\boldsymbol{b = 1 - 10/36 - 20/36 = 6/36}$	1	1		
	f) $E(X) = \frac{10}{36} \times 10 + \frac{20}{36} \times (-5) + \frac{6}{36} \times 30 = 5$ Oui, cela vaut la peine de jouer, car l'espérance est un nombre positif.	1	1		
	g) $E(X) = \frac{10}{36} \times 10 + \frac{20}{36} \times x + \frac{6}{36} \times 30 = 0$, doù $x = -14$.		1	1	
2	Un fabricant d'aires de jeux pour enfants souhaite proposer à ses clients un nouveau modèle de toboggan. Il crée un diagramme du toboggan proposé en projection oblique :  Le profil de cette glissière est mesuré en mètres et peut être modélisé par la fonction F définie par $F(x) = (ax - b)e^{-x}$pour $1 \leq x \leq 4$ où a et b sont deux paramètres. La fonction F a été représentée ci-dessous.				

	 a) On prévoit que la tangente à la fonction F au point d'abscisse $x = 1$ soit horizontale. **Déterminer** la valeur du paramètre b. b) Il est également prévu que le sommet du toboggan soit à 1,85 mètres. **Déterminer** la valeur du paramètre a. Le profil du mur est finalement modélisé par la fonction F définie par $F(x) = 5x \cdot e^{-x}$. c) **Montrer** que l'aire totale de chaque paroi latérale, ombrée sur le diagramme, est égale à $5 - \frac{25}{e^4}$ m². d) **Déterminer** le point du toboggan où la pente est la plus grande.				
	a/b) 1 Derivative$((a\,x - b)\,e^{-x}, x, 1)$ $\rightarrow\ \mathbf{a\,e^{-x} + b\,e^{-x} - a\,x\,e^{-x}}$ 2 Solve$(a\,e^{-1} + b\,e^{-1} - a\,e^{-1} = 0, b)$ $\rightarrow\ \{\mathbf{b = 0}\}$ 3 Solve$(a\,e^{-1} = 1.85, a)$ $\rightarrow\ \left\{\mathbf{a = \frac{37}{20}\,e}\right\}$ c) **Montrer** que l'aire totale de chaque paroi latérale, ombrée sur le schéma, est égale à $5 - \frac{25}{e^4}$ m². $\begin{cases} u = 5x, & v' = e^{-x} \\ u' = 5, & v = -e^{-x} \end{cases}$ $\int 5xe^{-x}\,dx = -5xe^{-x} + 5\int e^{-x}\,dx$ $-5xe^{-x} - 5e^{-x} + c$ $\int_0^4 5xe^{-x}\,dx = [-5xe^{-x} - 5e^{-x}]_0^4 =$ $(-5 \cdot 4e^{-4} - 5e^{-4}) - (-510e^0 - 5e^0) =$ $-\frac{20}{e^4} - \frac{5}{e^4} + 5 = 5 - \frac{25}{e^4}$ m² d) $x = 2$ A = Min(f1′(x), 0, 4) → (2, -0.68)	2 1 2	1 1 1	 2	
3	Les détecteurs de fumée optiques contiennent une cellule photoélectrique comme composant important. Une usine produit à cet effet des cellules photoélectriques. Un dispositif vérifie automatiquement les cellules photoélectriques et rejette celles qui sont défectueuses. En moyenne, il est précis à 86%. Cependant, on constate que la précision du dispositif varie - parfois il détecte un pourcentage plus élevé de cellules photoélectriques défectueuses et parfois un pourcentage plus faible. On constate que la précision du dispositif est modélisée par une				

distribution normale avec un écart type de 5%.

a) **Déterminer** la probabilité que le dispositif soit précis à moins de 85%.

b) $\frac{9}{10}$ du temps, le dispositif est précis à moins de $x\%$. **Déterminer** x.

c) Sachant qu'un jour déterminé, le dispositif a une précision inférieure à 90%, **déterminer** la probabilité qu'il ait une précision supérieure à 85%.

La fiabilité de deux types de détecteurs de fumée optiques est testée. Plus la probabilité qu'une alarme soit déclenchée est élevée, plus le détecteur est fiable.
Le type A contient une seule photocellule et se déclenche lorsque cette photocellule est activée.
Le type B contient trois cellules photoélectriques et se déclenche si au moins deux des trois cellules photoélectriques sont activées.
La probabilité qu'une cellule photoélectrique soit activée en présence de fumée est p. La probabilité que les deux types d'alarme soient déclenchés est calculée pour différentes valeurs de p.
$P(A_p)$ est la probabilité que le type A soit déclenché lorsque la probabilité est p,
$P(B_p)$ est la probabilité que le type B soit déclenché lorsque la probabilité est p.

d) **Compléter** le tableau ci-dessous.

p	0,3	0,5	0,7
$P(A_p)$	0,3	0,5	0,7
$P(B_p)$			
Type plus fiable			

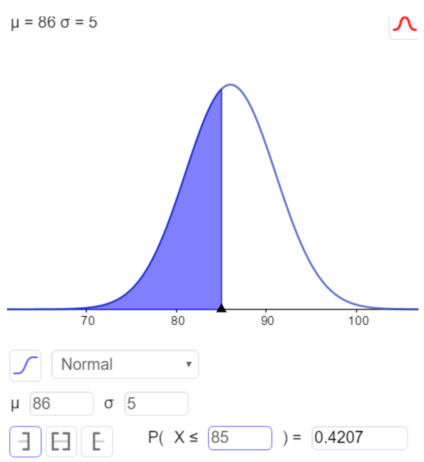
e) **Déterminer** pour quelle valeur de p, le type B devient plus fiable que le type A.

f) **Montrer** que l'on a les expressions suivantes en fonction de p :

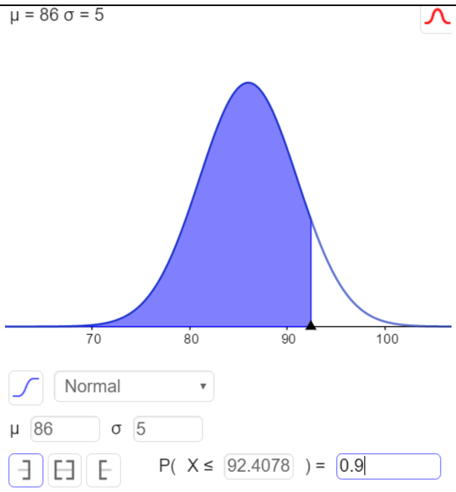
$$P(A_p) = p \text{ et } P(B_p) = -2p^3 + 3p^2.$$

g) **Expliquer** la signification de la fonction R suivante par rapport au contexte de la question. **Expliquer** les calculs des lignes (1) à (3) et **interpréter** le résultat.

$$R: p \longmapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$$
$$(1)\quad R'(p) = -6p^2 + 6p - 1$$
$$(2)\quad R'(p) = 0 \implies p_1 \approx 0{,}79$$
$$(3)\quad R''(p_1) < 0$$

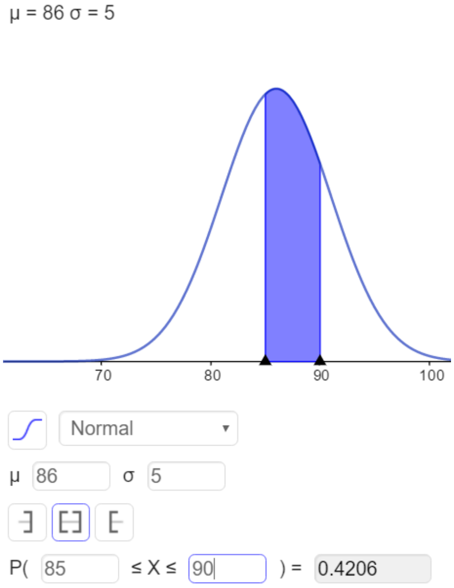


a) 1



1 | 1

b)



1 | 1

1 | 3

c)

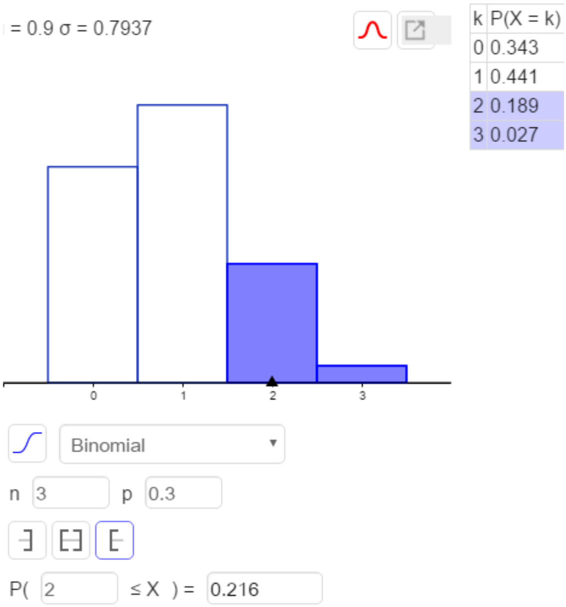
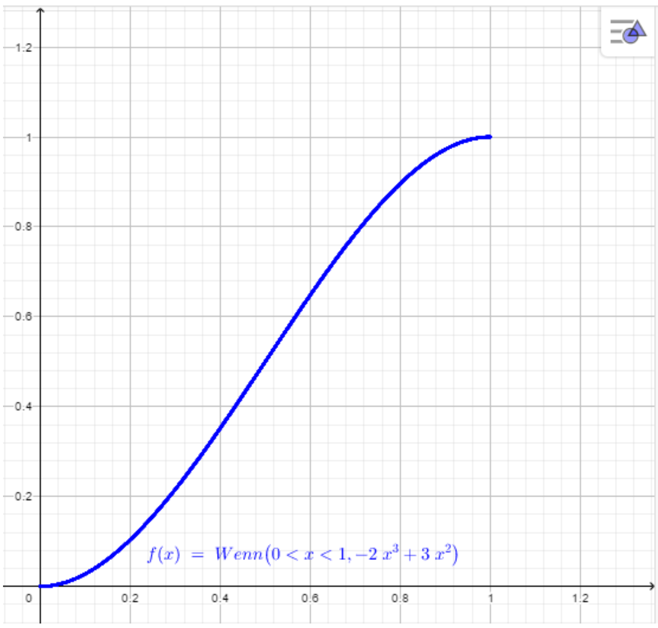
d) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de cellules photoélectriques présentant une réaction ». Y est supposée être distribuée de manière binomiale avec $n = 3$ et p.

$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3)$

$= \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 + \binom{3}{3} \cdot p^3$

$\Longrightarrow \; P(0{,}3) = 0{,}216\,; P(0{,}5) = 0{,}500\,; P(0{,}7) = 0{,}784$

<u>GeoGebra :</u> (montré pour P(0,3) seulement)

				2	
	e) Les résultats montrent que la fiabilité des détecteurs de fumée est améliorée si $p > 0{,}5$ mais si $p < 0{,}5$ la probabilité de déclencher une alarme est réduite par cette mesure, ce qui détériore la fiabilité. Si $p = 0{,}5$ la fiabilité d'une alarme reste toujours bonne.		1	3	
	f) $P(p) = P(Y \geq 2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 + \binom{3}{3} \cdot p^3$ $= \frac{3!}{2!(3-2)!}(p^2 - p^3) + \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot p^3$ $= 3 \cdot (p^2 - p^3) + 1 \cdot p^3$ $= 3p^2 - 3p^3 + p^3 = -2p^3 + 3p^2$ 			1	2
	g) La fonction R est la fonction de différence de P et p. R indique pour quel p la fiabilité $P(p)$ avec trois photocellules est supérieure à la fiabilité p d'une seule photocellule. Équation (1) : La dérivée de R est déterminée. Équation (2) : Le zéro de la dérivée de la fonction R est calculé. Il est situé à la position $p_1 \approx 0{,}79$.				

<table>
<tr><td></td><td>Équation (3) : Le signe de la fonction dérivée seconde à la position p_1 est vérifié. R'' a un signe négatif à cet endroit.

De cette manière, un extremum est calculé pour la fonction de différence R à savoir un maximum, puisque $R''(p)$ est négatif. Si l'on choisit $p \approx 0{,}79$, la fonction de différence $R(p)$ a la valeur la plus élevée, c'est-à-dire que la fiabilité du message est ici maximale.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="5">Soit plan E d'équation $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$ et pour chaque valeur $a \in \mathbb{R}$, une droite g_a d'équation paramétrique :

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) **Déterminer** les coordonnées de l'intersection de la droite g_a avec le plan E en fonction de a.
b) **Trouver** pour quelle valeur de a il n'y a pas de solution.
Interpréter le résultat de manière géométrique.</td></tr>
<tr><td></td><td>a) g_a dans E:

$$2t - (1 + t \cdot a) + 3(1 + 2t) = 5$$
$$2t - 1 - t \cdot a + 3 + 6t = 5$$
$$(8 - a) \cdot t = 3$$
$$t = \tfrac{3}{8-a} \text{ pour } a \neq 8$$

$$\Rightarrow S_a\left(\frac{3}{8-a}; 1 + \frac{3a}{8-a}; 1 + \frac{6}{8-a}\right)$$</td><td></td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>b) Il n'y a pas de solution pour $a = 8$. Dans ce cas, le vecteur directeur de la droite g_8 est orthogonal au vecteur normal du plan.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ La droite et le plan sont parallèles.

(a) g_a in E:

Löse(2 (0 + λ) − (1 + λ A) + 3 (1 + 2 λ) = 5, λ)

$\rightarrow \left\{\lambda = \frac{-3}{A-8}\right\}$

Intersection point Sa:

Vektor((0 + λ, 1 + λ A, 1 + λ · 2))

Ersetze: $\begin{pmatrix} \frac{3}{-A+8} \\ 3 \cdot \frac{A}{-A+8} + 1 \\ 1 + \frac{6}{-A+8} \end{pmatrix}$

No solution for A=8, as the denominator becomes 0.

Skalarprodukt({1, 8, 2}, {2, −1, 3})

$\rightarrow 0$

Geometric interpretation: line and plane are parallel</td><td></td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>