Teil B Antworten

	Teil B	KV	M	Pbl	Int.
1	Tom und Simon spielen ein Brettspiel. Jedes Mal, wenn es Tom gelingt, seine Figur über eine ganze Runde auf dem Brett zu bewegen, erhält er 5 Punkte. Jedes Mal, wenn Simon es schafft, seine Figur eine ganze Runde über das Brett zu bewegen, erhält er 10 % des vorherigen Betrags. Sie beginnen beide mit 10 Punkten.				

a) **Berechnen** Sie Toms Gesamtpunktzahl, nachdem er sich 20 Mal um das Brett bewegt hat.

b) **Schreiben** Sie in Abhängigkeit von n die Formel T(n) für Toms Punktestand nach n Zügen um das Brett.

c) Wenn gewusst ist, dass Simons Punktestand nach n Zügen um das Brett mit einer geometrischen Folge modelliert werden könnte, **erklären** Sie die Verwendung der Formel:

$$\boldsymbol{S(n) = 11 \cdot 1.1^{n-1}}$$

d) Simon und Tom haben das Brett gleich oft umrundet. Simons Punktestand hat sich gerade vor den von Tom geschoben.
Finden Sie heraus, wie oft sie schon mit der Figur ganze Runden auf dem Brett gedreht haben.

Tom fordert Simon zu einem Würfelspiel heraus. Zwei faire sechsseitige Würfel werden geworfen und die Summe der Punkte notiert. Für eine Summe kleiner als 6 erhält Simon 10 Cent, für eine Summe zwischen 6 und 9 verliert Simon 5 Cent, und für eine Summe größer oder gleich 10 erhält Simon 30 Cent. Der Gewinn unterliegt der unten dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung, wobei die Zufallsvariable N die Summe der Punkte ist.

N	$\boldsymbol{n < 6}$	$\boldsymbol{6 \leq n \leq 9}$	$\boldsymbol{n \geq 10}$
Gewinne n	10 Cent	–5 Cent	30 Cent
$\boldsymbol{P(N = n)}$	a	$\boldsymbol{\frac{20}{36}}$	b

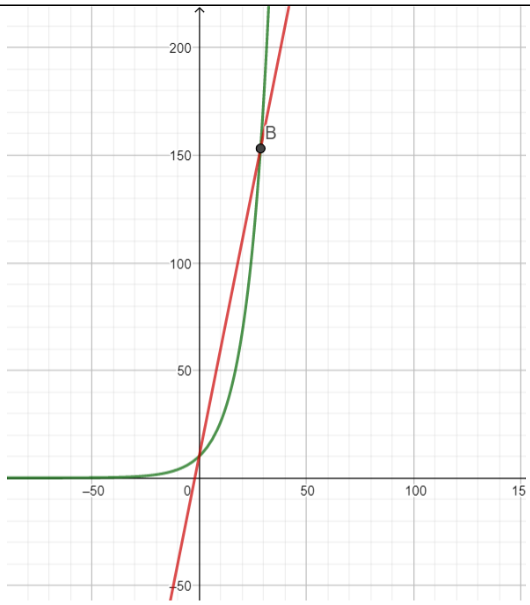
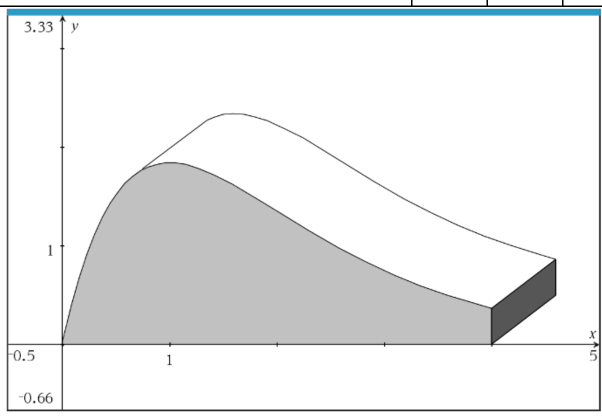
e) **Zeigen** Sie, dass $\boldsymbol{a = \frac{10}{36}}$ et $\boldsymbol{b = \frac{6}{36}}$.

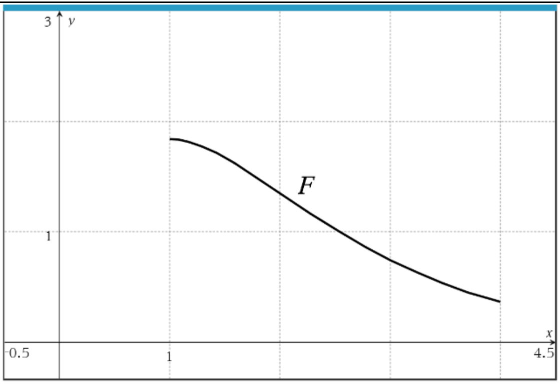
f) **Berechnen** Sie den Erwartungswert von Simons Gewinnen in diesem Spiel und kommentieren Sie, ob es sich für Simon lohnt, zu spielen.

g) Ein Spiel wird als fair bezeichnet, wenn der Erwartungswert $\mathbf{0}$ ist.

Bestimmen Sie, wie viele Cents für die Summe zwischen $\mathbf{6}$ und $\mathbf{9}$ verloren gehen müssen, damit das Spiel fair ist.

	KV	M	Pbl	Int.
a) Man berechnet Toms Punktzahl, nachdem er sich 20-mal um das Brett bewegt hat. $c = 15 + 19 \cdot 5$ $\rightarrow 110$	2			
b) Man schreibt in Abhängigkeit von n die Formel T(n) für Toms Punktestand nach n Zügen um das Brett. T(n)=5n+10.	1	1		
c) Nach einer Runde: $10 + 10 \cdot 0{,}1 = 10 + 1 = 11 \cdot 1{,}1^{1-1}$ Nach 2 Runden: $11 + 11 \cdot 0{,}1 = 11 \cdot (1 + 0{,}1) = 11 \cdot 1{,}1 = 11 \cdot 1{,}1^{2-1}$ usw.		2		
d) Skizzieren Sie den Graphen von T(n) und S(n) im gleichen Koordinatensystem.		2	1	

	 Wie viele Züge muss Simon mindestens machen, um die Punktzahl des Tom zu übertreffen? B = Intersect(S, T, (28.63, 153.16)) → (28.63, 153.16) Antwort: 29 Züge e) $\boldsymbol{a = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)}$ $= 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36$ $\boldsymbol{b = 1 - 10/36 - 20/36 = 6/36}$ f) E(X)= $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{36}} \times 10 + \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{36}} \times (-5) + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}} \times 30 = 5$ Ja, es lohnt sich zu spielen, weil der Erwartungswert eine positive Zahl ist. g) E(X)= $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{36}} \times 10 + \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{36}} \times x + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{36}} \times 30 = 0,$ x=-14	1 1	1 1 1	1	
2	Ein Hersteller von Kinderspielplätzen möchte seinen Kunden ein neues Modell einer Rutsche anbieten. Er erstellt ein Diagramm der vorgeschlagenen Rutsche in einer Schrägprojektion:  Das Profil dieser Rutsche wird in Metern gemessen und kann durch die Funktion F modelliert werden, gegeben durch $F(x) = (ax - b)e^{-x}$, für $1 \leq x \leq 4$, wobei a und b zwei Parameter sind. Die Funktion F wurde unten gezeichnet.				



a) Die Tangente an dem Graphen der Funktion F soll an der Stelle, an der $x = 1$ ist, horizontal verlaufen. **Bestimmen** Sie den Wert des Parameters b.

b) Es ist auch geplant, dass der Anfang der Rutsche bei 1,85 Metern liegen wird. **Bestimmen** Sie den Wert des Parameters a.

Es wird angenommen, dass das Profil der Rutsche schließlich modelliert wird durch die Funktion F, wobei $F(x) = 5x \cdot e^{-x}$.

c) **Zeigen** Sie, dass die Gesamtfläche jeder Seitenwand, die im Diagramm grau schattiert ist, gleich $5 - \frac{25}{e^4}$ m^2.

Bestimmen Sie den Punkt auf der Rutsche, an dem die Steigung am größten ist.

a)/b)

1 Derivative$((a\,x - b)\,e^{-x}, x, 1)$

$\rightarrow\ \mathbf{a\,e^{-x} + b\,e^{-x} - a\,x\,e^{-x}}$

2 Solve$(a\,e^{-1} + b\,e^{-1} - a\,e^{-1} = 0, b)$

$\rightarrow\ \{\mathbf{b = 0}\}$ 2 1

3 Solve$(a\,e^{-1} = 1.85, a)$ 1 1

$\rightarrow\ \left\{\mathbf{a = \frac{37}{20}\,e}\right\}$

c) **Zeigen** Sie, dass die Gesamtfläche jeder Seitenwand, die im Diagramm grau schattiert ist, gleich $5 - \frac{25}{e^4}$ m^2. 2

$$\begin{cases} u = 5x, & v' = e^{-x} \\ u' = 5, & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$\int 5xe^{-x}\,dx = -5xe^{-x} + 5\int e^{-x}\,dx$

$-5xe^{-x} - 5e^{-x} + c$

$\int_0^4 5xe^{-x}\,dx = [-5xe^{-x} - 5e^{-x}]_0^4 =$

$(-5 \cdot 4e^{-4} - 5e^{-4}) - (-510e^{0} - 5e^{0}) =$

$-\frac{20}{e^4} - \frac{5}{e^4} + 5 =$

$(5 - \frac{25}{e^4})\ m^2$

d) x=2 1 2

A = Min(f1'(x), 0, 4)

→ (2, -0.68)

3 Optische Rauchmelder enthalten als wichtigen Bestandteil eine Fotozelle. Eine Fabrik produziert zu diesem Zweck Fotozellen. Ein Gerät prüft automatisch die Fotozellen und weist diejenigen zurück, die fehlerhaft sind. Im Durchschnitt ist das Gerät zu 86 % genau. Es wird jedoch festgestellt, dass

die Genauigkeit des Geräts variiert - manchmal erkennt es einen höheren Prozentsatz an fehlerhaften Fotozellen und manchmal einen niedrigeren Prozentsatz. Es wird festgestellt, dass die Genauigkeit des Geräts durch eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung von 5% modelliert wird.

a) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät weniger als 85% genau ist.

b) $\frac{9}{10}$ der Zeit ist das Gerät weniger als x % genau. **Bestimmen Sie** x.

c) Wenn angenommen wird, dass das Gerät an einem bestimmten Tag weniger als 90% genau ist, **finden** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als 85% genau ist.

Zwei Typen von optischen Rauchmeldern werden auf ihre Zuverlässigkeit getestet. Je höher die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Alarm ausgelöst wird, desto zuverlässiger ist der Rauchmelder.
Typ A enthält eine einzelne Fotozelle und wird ausgelöst, wenn diese aktiviert wird.
Typ B enthält drei Fotozellen und wird ausgelöst, wenn mindestens zwei der drei Fotozellen aktiviert sind.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Fotozelle bei Vorhandensein von Rauch aktiviert wird, ist *p*. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Alarmtypen ausgelöst werden, wird für verschiedene Werte von *p* berechnet
$P(A_p)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Typ A ausgelöst wird, wenn die Wahrscheinlichkeit *p* ist.
$P(B_p)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Typ B ausgelöst wird, wenn die Wahrscheinlichkeit *p* Ist.

a) **Füllen** Sie die folgende Tabelle **aus**.

p	0,3	0,5	0,7
$P(A_p)$	0,3	0,5	0,7
$P(B_p)$			
Zuverlässigerer Typ			

b) **Bestimmen** Sie, für welchen Wert von *p* der Typ B zuverlässiger wird als der Typ A.

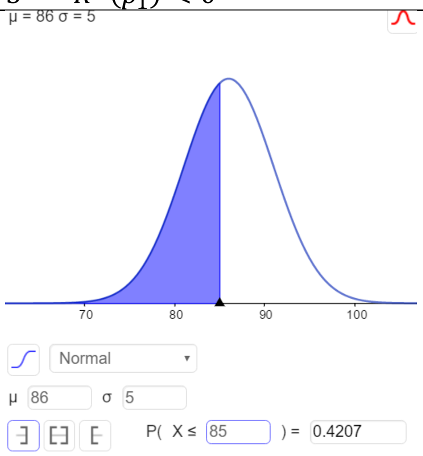
c) **Zeigen** Sie, dass, in Bezug auf *p*, $P(A_p) = p$ und $P(B_p) = -2p^3 + 3p^2$.

d) **Erläutern** Sie die Bedeutung der folgenden Funktion R in Bezug auf den Kontext der Fragestellung. **Erklären** Sie, was in den Zeilen (1) bis (3) berechnet wird und **interpretieren** Sie das Ergebnis.

$$R: p \longmapsto R(p) = -2p^3 + 3p^2 - p$$
$$(1)\quad R'(p) = -6p^2 + 6p - 1$$
$$(2)\quad R'(p) = 0 \implies p_1 \approx 0{,}79$$

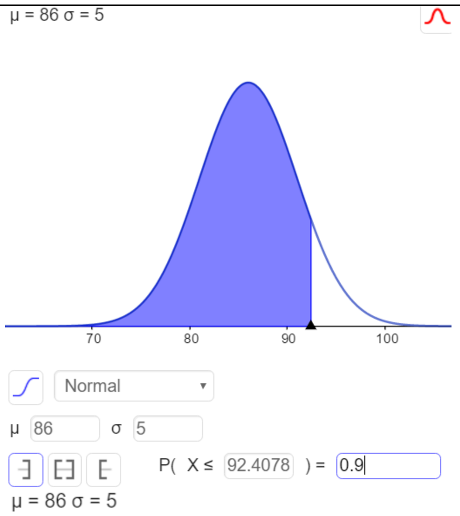
3 $\quad R''(p_1) < 0$

a)

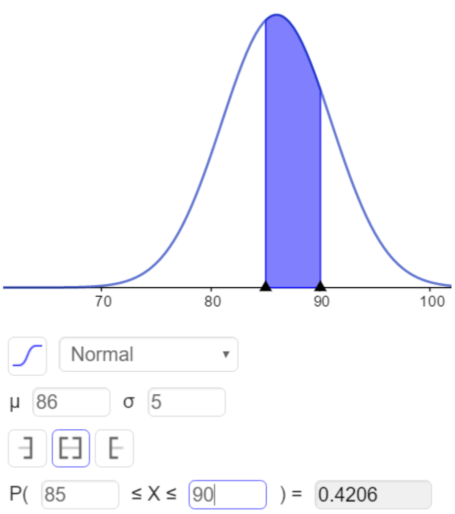


a)	1			
	1	1		

<table>
<tr>
<td></td>
<td>



b)



c)

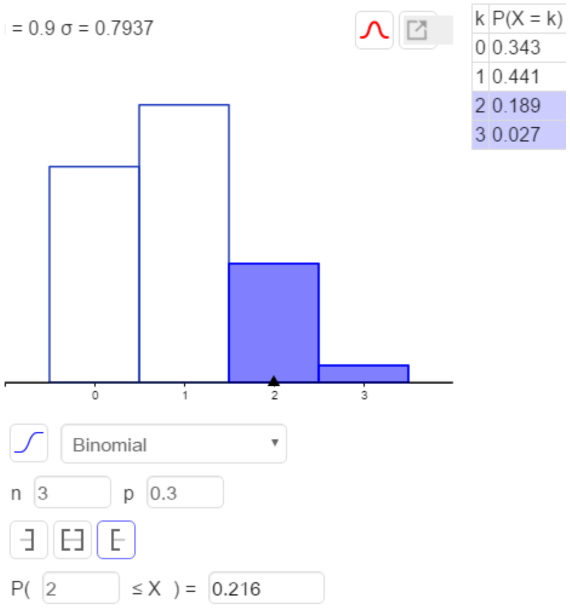
</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

d) Es sei die Zufallsvariable y: "Anzahl der Fotozellen, die eine Reaktion zeigen" . Es wird angenommen, dass sie binomialverteilt ist mit n = 3 und p.

$$P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3)$$
$$= \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 + \binom{3}{3} \cdot p^3$$
$$\Longrightarrow P(0{,}3) = 0{,}216; \;\; P(0{,}5) = 0{,}500,$$
$$P(0{,}7) = 0{,}784$$

<u>GeoGebra: </u>(nur für P(0,3) dargestellt)

</td>
<td></td>
<td>1</td>
<td>3</td>
<td></td>
</tr>
</table>



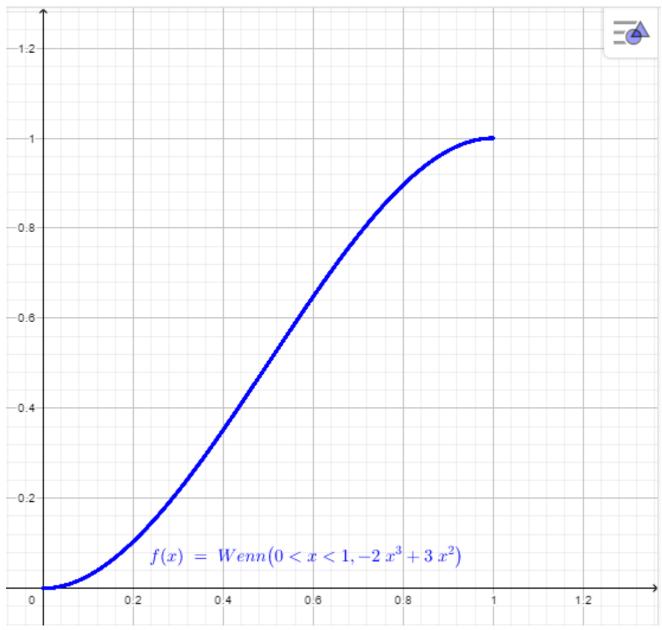
2

1 3

e) Die Ergebnisse zeigen, dass die Zuverlässigkeit von Rauchmeldern verbessert wird, wenn $p > 0.5$. Jedoch, wenn $p < 0.5$ wird die Wahrscheinlichkeit, einen Alarm auszulösen, durch diese Maßnahme verringert, wodurch sich die Zuverlässigkeit verschlechtert. Wenn $p = 0.5$, bleibt die Zuverlässigkeit des Alarms gleichbleibend gut.

f) $P(p) = P(Y \geq 2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^1 + \binom{3}{3} \cdot p^3$

$$= \frac{3!}{2!\,(3-2)!}(p^2 - p^3) + \frac{3!}{3!\,(3-3)!} \cdot p^3$$
$$= 3 \cdot (p^2 - p^3) + 1 \cdot p^3$$
$$= 3p^2 - 3p^3 + p^3 = -2p^3 + 3p^2$$



g) Die Funktion *R* ist die Differenzfunktion von *P* und *p*. *R* gibt an, für welches *p* die Zuverlässigkeit *P(p)* mit drei Fotozellen größer ist als die Zuverlässigkeit *p* einer einzelnen Fotozelle.

Gleichung (1): Die Ableitung von R wird bestimmt. 1 2

Gleichung (2): Die Nullstelle der Ableitung der Funktion R

	wird berechnet. Er befindet sich an der Stelle $p_1 \approx 0{,}79$. Gleichung (3): Das Vorzeichen der zweiten Ableitungsfunktion an der Position p_1 wird überprüft. R'' hat dort ein negatives Vorzeichen. Auf diese Weise wird ein Extremum für die Differenzfunktion R, nämlich ein Maximum, da $R''(p)$ negativ ist. Wenn $p \approx 0.79$ gewählt wird, hat die Differenzfunktion $R(p)$ den höchsten Wert, d. h. die Zuverlässigkeit der Meldung ist hier am größten.				
4	Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade g_a durch: $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ a) **Bestimmen** Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g_a mit der Ebene E in Abhängigkeit von a. b) **Finden** Sie heraus, für welchen Wert von a gibt es keine Lösung. **Interpretieren** Sie das Ergebnis geometrisch.				
	a) g_a in E: $2t - (1 + ta) + 3(1 + 2t) = 5$ $2t - 1 - ta + 3 + 6t = 5$ $(8 - a) \cdot t = 3$ $t = \frac{3}{8-a}$ für $a \neq 8$ $\Rightarrow S_a\left(\frac{3}{8-a} \middle\vert 1 + \frac{3a}{8-a} \middle\vert 1 + \frac{6}{8-a}\right)$		2	2	
	b) Es gibt keine Lösung für $a = 8$. In diesem Fall steht der Richtungsvektor der Geraden g_8 senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene. $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ Die Gerade und die Ebene sind parallel. (a) g_a in E: Löse(2 (0 + λ) − (1 + λ A) + 3 (1 + 2 λ) = 5, λ) → $\left\{\lambda = \frac{-3}{A - 8}\right\}$ Intersection point Sa: Vektor((0 + λ, 1 + λ A, 1 + λ · 2)) Ersetze: $\begin{pmatrix} \frac{3}{-A+8} \\ 3 \cdot \frac{A}{-A+8} + 1 \\ 1 + \frac{6}{-A+8} \end{pmatrix}$ No solution for A=8, as the denominator becomes 0. Skalarprodukt({1, 8, 2}, {2, −1, 3}) → 0 Geometric interpretation: line and plane are parallel			2	1