Exemple de sujet de baccalauréat : nouveau programme 2021

MATHÉMATIQUES 5 PÉRIODES
PARTIE A

Formation de mathématiques, printemps 2022.

Caractéristiques de l'épreuve :

- Partie A (sans calculatrice)
  - durée : 2 heures
  - nombre d'exercices : 8 (exercices courts)
  - barème : 50 points
- Partie B (avec calculatrice)
  - durée : 2 heures
  - nombre d'exercices : 4 (exercices longs)
  - barème : 50 points

Exercice 1 Calc. : ✗

5 points

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = a + \mathrm{e}^{-x+1} \qquad g(x) = \frac{b \cdot x + 2}{x - 1}$$

où a et b sont des nombres réels.
Trouvez les valeurs de a et b telles que f et g aient les propriétés suivantes :

- f et g ont la même limite en $+\infty$.
- Les graphes des fonctions f et g on un point d'intersection à l'abscisse 2.

Exercice 2 Calc. : ✗

5 points

On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, où n est un nombre réel.
Prouvez que quelle que soit la valeur de n, le volume du parallélépipède déterminé par ces vecteurs est toujours le même.

Exercice 3 Calc. : ✗

5 points

Résoudre l'équation :

$$\log_2(x) + \log_2(x-1) = 1$$

Exercice 4 Calc. : ✗

5 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.
Parmi les quatre fonctions ci-dessous, laquelle est une primitive de f ? Expliquez votre réponse.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \cdot \sin x \qquad H(x) = 2x \cdot \cos x + (x^2 - 2) \cdot \sin x$$

$$G(x) = -2x \cdot \sin x \qquad K(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$$

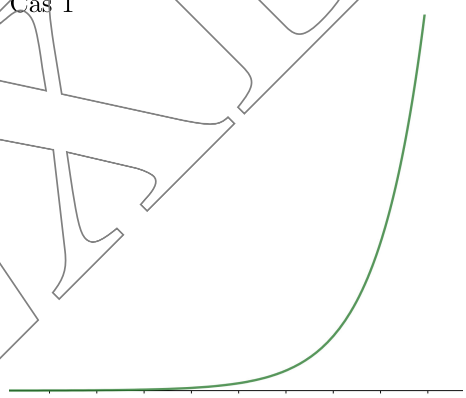
Exercice 5 Calc. : ✗

Soient a et b deux réels non nuls et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

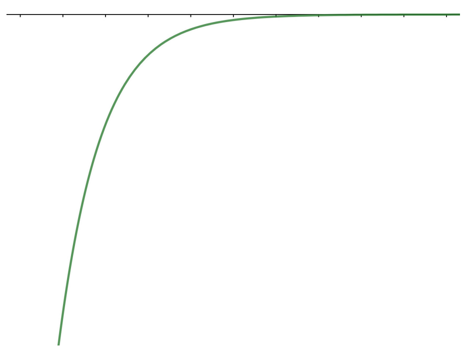
$$f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{b \cdot x}$$

Voici deux allures possibles pour la courbe de cette fonction.
Dans chaque cas, préciser les valeurs possibles pour a et b.

Cas 1



Cas 2



Exercice 6 Calc. : ✗

5 points

Trouver un nombre complexe z qui est une racine cubique de $-8i$ et une racine quatrième de $-8 - 8i\sqrt{3}$.

Exercice 7 Calc. : ✗

La réserve de Corbett Nation Park en Inde est une réserve où l'on peut rencontrer des tigres.

1. Cette réserve abrite 8 tigres, dont cinq sont marqués.
   (2 points) On capture trois tigres, quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient marqués ?
   Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Un groupe de 8 touristes arrive sur le site pour un safari.
   (2 points) Quatre de ces touristes doivent s'installer dans la première voiture, à quatre places différentes.
   De combien de manières différentes peuvent-ils s'installer dans la voiture ?
3. On sait que 40% des visiteurs de Corbett Nation Park sont européens.
   Parmi les visiteurs européens, 10% rencontrent un tigre.
   De plus, 20% des visiteurs de cette réserve rencontre un tigre.
   (2 points) On croise un visiteur non européen au hasard. Calculer la probabilité qu'il ait rencontré un tigre.
4. Chaque jour, la probabilité qu'un touriste rencontre un tigre est de 0,2.
   (a) (2 points) Calculer la probabilité qu'un touriste voie un tigre pour la première fois le troisième jour de sa visite.
   (b) (2 points) On note $P(X = n) = p_n$ la probabilité qu'un touriste voie un tigre pour la première fois le n-ème jour de sa visite. Montrer que la suite p est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) (3 points) Démontrer que $P(X \leq n) = 1 - 0,8^n$. Interpréter le résultat dans ce contexte.

Exercice 8 Calc. : ✗

Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) \qquad g(x) = x^n \cdot \ln(x)$$

où n est un entier positif.

(7 points) Prouvez que les graphiques de ces deux fonctions ne se croisent jamais, quelle que soit la valeur de n.