Exemple de sujet de baccalauréat : nouveau programme 2021

MATHÉMATIQUES 5 PÉRIODES
PARTIE B

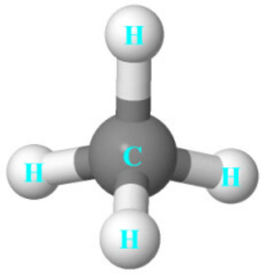
Formation de mathématiques, printemps 2022.

Caractéristiques de l'épreuve :

- Partie A (sans calculatrice)
  - durée : 2 heures
  - nombre d'exercices : 8 (exercices courts)
  - barème : 50 points
- Partie B (avec calculatrice)
  - durée : 2 heures
  - nombre d'exercices : 4 (exercices longs)
  - barème : 50 points

Exercice 1 Calc. : ✓

La molécule de méthane CH_4, représentée ci-contre, peut être modélisée par un tétraèdre régulier OABD, avec $O(0;0;0)$, $A\left(3;\sqrt{3};2\sqrt{6}\right)$, $B\left(3;3\sqrt{3};0\right)$ et $D(6;0;0)$.
Les quatre sommets sont les positions des atomes d'hydrogène H.
On s'intéresse dans cet exercice à la position de l'atome de carbone C, à l'intérieur de ce tétraèdre. Cette position est représentée par un point que l'on nomme G.



1 point — 1. Le tétraèdre est régulier, donc toutes ses arêtes ont la même longueur. Justifier que cette longueur est égale à 6.

2 points — 2. Justifier que les coordonnées du projeté orthogonal A′ de A sur le plan (Oxy) d'équation $z = 0$ sont $A'\left(3;\sqrt{3};0\right)$.

3. Le point G est l'intersection de (AA′) et (IJ), où $I\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{6}\right)$ est le milieu du segment [AO] et $J\left(\frac{9}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$ le milieu du segment [BD].

3 points — (a) Démontrer que les coordonnées de G sont $\left(3;\sqrt{3};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

1 point — (b) Vérifier que la distance entre G et A est égale à $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.
On admet que c'est aussi la distance entre G et les autres sommets du tétraèdre.

2 points — (c) En réalité, la longueur de la liaison C–H est environ égale à 109 picomètres. Déterminer une valeur approchée, en picomètres, de la distance entre deux atomes d'hydrogène.

3 points — 4. Donner une valeur approchée de la mesure de l'angle formé par deux liaisons C–H.

Exercice 2 Calc. : ✓

1. Soit le nombre complexe $w = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$.

2 points — (a) Écrire w sous forme exponentielle.

3 points — (b) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles w^n est un nombre réel.

2. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n défini par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}\right) \cdot z_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2 points — (a) Calculer z_1 et z_2, puis placer dans le plan complexe les points M_0, M_1, M_2 (unité graphique : 4 cm).

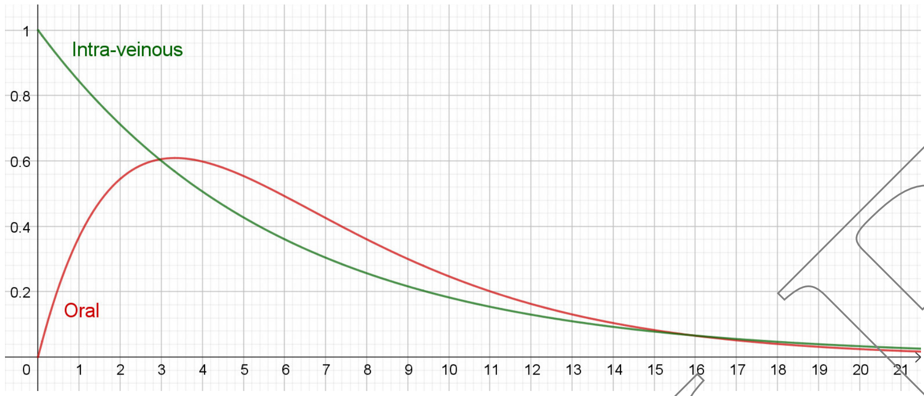
3 points — (b) Soit r la suite définie, pour tout entier naturel n, par $r_n = |z_n|$.
Montrer que la suite r est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
En déduire une expression de r_n en fonction de n.

1 point — (c) On admet que pour tout entier naturel n, $z_n = r_n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi}{4}}$.
À quelle condition le point M_n appartient-il à l'axe des réels ?

2 points — (d) Décrire la position précise du point M_{10} qui représente z_{10} dans le plan complexe.

Exercice 3 Calc. : ✓

Les graphiques ci-dessous montrent la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient, avec deux types différents d'injection unique — intra-veineuse et orale — en fonction du temps t, en minutes, sur l'intervalle $[0, 20]$.
La valeur 1 sur l'axe des ordonnées indique la concentration initiale au moment de l'injection intra-veineuse.



Utilisez les graphiques pour répondre aux questions **1.** à **4**. Donnez des valeurs approximatives avec la précision permise par les graphiques.

1 point — 1. Décrire les variations de concentration après une injection intra-veineuse.

1 point — 2. À quel moment l'injection orale atteint-elle sa concentration maximale ? Quelle est alors la valeur de cette concentration ?

2 points — 3. Donnez des valeurs approximatives des coordonnées du point d'inflexion après une injection orale. Qu'est-ce que cela signifie pour le taux de variation de la concentration à ce moment-là ?

2 points — 4. Sur quel intervalle de temps la concentration est-elle plus élevée après une injection orale qu'après une injection intra-veineuse ?

Les fonctions f et g qui modélisent ces concentrations sont définies par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-0,17t} \qquad \text{et} \qquad g(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-0,3t-0,7}$$

3 points — 5. Expliquez la façon dont la fonction f modélise l'injection intra-veineuse et la fonction g modélise l'injection orale.

2 points — 6. Utilisez la calculatrice pour trouver les moments où les deux concentrations sont égales. Donner des valeurs approchées au millième.

2 points — 7. L'aire sous la courbe de l'une de ces fonctions donne l'exposition totale au médicament pendant une certaine période. Calculer cette valeur sur les cinq premières minutes, pour les deux types d'injections.
Donnez une réponse détaillée, avec toutes les étapes du calcul.

Exercice 4 Calc. : ✓

	Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième.

1. Voici l'évolution des ventes de vélos à assistance électrique en France entre 2007 et 2017.

Année	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Rang de l'année x_i	0	2	4	6	8	10
Nombre de vélos à assistance électrique vendus (en milliers) : n_i	10	23	37	57	102	278

Données : Observatoire du Cycle

2 points — (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de n en x pour ces données. Préciser le coefficient de corrélation.

2 points — (b) On pose $y_i = \ln(n_i)$. Dans ce cas, un ajustement affine de y en x est donné par la formule $y = 0,307x + 2,353$, avec un coefficient de corrélation environ égal à 0,981.
Utiliser le modèle le mieux adapté pour extrapoler les ventes de vélos de ce type en 2023.

2. Une entreprise produit en grande série des vélos à assistance. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque vélo pris au hasard dans la production, associe son autonomie, en kilomètres. On admet que cette variable aléatoire X suit une loi normale.
On sait que $P(X \geq 84) = 0,2266$ et $P(X \leq 86) = 0,8943$.

4 points — Déterminer la moyenne et l'écart type de cette loi. Arrondir les résultats en km à l'entier le plus proche.

3. Dans cette partie, on considère que 4% des batteries au lithium-ion présentent un défaut et sont qualifiées de « non conformes ».
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 150 batteries pris au hasard dans la production, associe le nombre de batteries non conformes.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler un tel prélèvement de 150 batteries à un tirage avec remise.

2 points — (a) Déterminer $P(Y \leq 5)$ en précisant le modèle choisi.

2 points — (b) Déterminer la probabilité que, dans un prélèvement au hasard de 150 batteries, toutes les batteries soient conformes. Interpréter le résultat.