Exemple de sujet de baccalauréat : nouveau programme 2021

MATHÉMATIQUES 5 PÉRIODES
PARTIE B

Formation de mathématiques, printemps 2022.

Caractéristiques de l'épreuve :

- Partie A (sans calculatrice)
  - durée : 2 heures
  - nombre d'exercices : 8 (exercices courts)
  - barème : 50 points
- Partie B (avec calculatrice)
  - durée : 2 heures
  - nombre d'exercices : 4 (exercices longs)
  - barème : 50 points

Exercice 1 Calc. : ✓

Gabriella joue avec sa petite voiture télécommandée. L'équation qui suit décrit la trajectoire de la voiture :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'unité de distance est le mètre et le temps est en minutes.

1. Donnez la position initiale de la voiture. — 1 point
2. Calculez la position de la voiture après 15 secondes. — 1 point
3. Calculez la vitesse de la voiture. — 1 point

Grand-mère regarde Gabriela du point $P(-1; -6)$

4. Trouvez la distance la plus courte entre le point P et la trajectoire de la voiture. — 3 points

Le bord de la falaise est au point $\left(0; \frac{23}{3}\right)$ et grand-mère marche dans cette direction avec le vecteur vitesse $\begin{pmatrix} 3 \\ 41 \end{pmatrix}$.

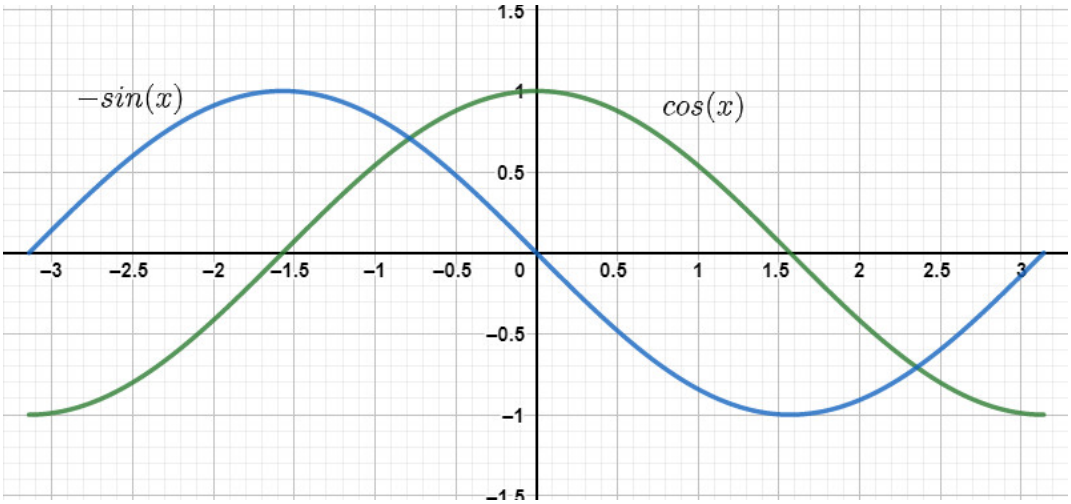
5. Après combien de minutes la voiture atteindra-t-elle le bord de la falaise ? — 2 points
6. La grand-mère pourra-t-elle rattraper la voiture avant qu'elle ne tombe de la falaise si elle commence à bouger en même temps que la voiture ? Expliquez votre réponse. — 4 points

Exercice 2 Calc. : ✓

1. Un entrepreneur doit exécuter des travaux pour un organisme public. S'ils ne terminent pas les travaux dans les délais, ils devront s'acquitter d'une astreinte journalière : 100 € le premier jour, 110 € le deuxième jour, et ainsi de suite avec une augmentation quotidienne de 10 € par jour.
   Soit u_n la pénalité le n-ième jour. Ainsi, le premier terme de la suite u est $u_1 = 100$.
   (a) Énoncez la nature et les caractéristiques de la suite u. — 1 point
   (b) Expliquez pourquoi $u_n = 90 + 10n$ pour toutes les valeurs de l'entier n. — 1.5 point
   (c) Quel jour l'astreinte journalière s'élèverait-elle à 220 € ? — 1 point
   (d) Quel montant total de pénalité l'entrepreneur aurait-il payé après 20 jours de retard ? — 2.5 points
2. Sur un autre chantier, la pénalité de retard est de 80 € sur le premier jour, puis augmente de 10% chaque jour. Soit v_n le montant de la pénalité au jour n dans ce cas.
   (a) Calculez les valeurs des trois premiers termes v_1, v_2 et v_3. — 1.5 point
   (b) Expliquez pourquoi $v_n = 80 \cdot 1,10^{n-1}$ pour toutes les valeurs de l'entier n. — 1.5 point
   (c) Quel est le montant total de la pénalité que l'entrepreneur aurait payé après 20 jours de retard ? — 2 points
3. À partir de quel jour le montant de l'astreinte journalière dans ce cas dépasse celui du premier cas ? — 3 points

Exercice 3 Calc. : ✓

1. On considère les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -\sin x$ sur $[-\pi;\pi]$ et leurs représentations graphiques ci-dessous :



Justifier que les seules solutions de l'équation $\cos x + \sin x = 0$ sur $[-\pi;\pi]$ sont $\dfrac{-\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. — 3 points

2. Soit f la fonction définie sur $[-\pi;\pi]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \sin x$
On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

   (a) Déterminer les variations de la fonction f sur $[-\pi;\pi]$, en précisant l'abscisse, la valeur et la nature de chaque extremum. — 2 points

   (b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$. — 2 points

   (c) Sur quel intervalle C_f est-elle entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes ? Justifier. — 2 points

   (d) En utilisant deux intégrations par parties successives, calculer la valeur exacte de l'intégrale : — 2 points

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4 Calc. : ✓

Une entreprise mène une étude sur la relation entre l'expérience et le salaire de leur personnel. L'expérience et les salaires de leurs 12 employés ont été compilés.

Expérience x (années)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Salaire y (€)	4 200	4 800	4 600	5 000	5 200	5 600	5 650	5 660	5 500	6 000	5 831	6 200

1. L'un des coefficients de corrélation suivants correspond à ces données. Lequel est-ce ? — 1 point

$$r_1 = 0,95; \quad r_2 = -0,95 \quad \text{ou} \quad r_3 = 1?$$

   Expliquez sans vous référer à aucun calcul.

2. Calculez les coordonnées du point moyen de ces données, à l'entier le plus proche. — 2 points
3. L'équation de la droite de régression avec la méthode des moindres carrés est $y = a + bx$, où — 2 points

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \quad \text{et} \quad a = \overline{y} - b\overline{x}.$$

   Utilisez les informations données ci-dessous pour calculer les valeurs des coefficients a et b. Donnez vos réponses au centième près.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	-11	121
2	-9	81
4	-7	49
6	-5	25
8	-3	9
10	-1	1
12	1	1
14	3	9
16	5	25
18	7	49
20	9	81
22	11	121

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = 45\ 009$$

4. Utilisez le modèle linéaire $f(x) = 78,7x + 4\ 488$ pour estimer le salaire d'un employé avec 40 ans d'expérience. — 2 points

Les salaires des employés de cette entreprise sont normalement répartis avec une moyenne de $\mu = 5\ 353$ et un écart-type de $\sigma = 553$.

5. M. Smith, un employé de cette entreprise, est payé 6 459 €. Quelle proportion des employés de cette société sont moins payés que M. Smith ? — 1.5 point
6. Calculez la probabilité que le salaire d'un employé soit supérieur à 7 636 € et commentez votre réponse pour la question **5**. — 1.5 point

Dans une autre entreprise, les salaires sont normalement répartis avec un écart-type de $s = 620$.

7. Sachant que la probabilité que le salaire d'un employé soit supérieur à 5 000 € est d'environ 0,107, trouvez le salaire moyen dans cette entreprise. Donnez votre réponse arrondie au nombre entier le plus proche. — 3 points